Universitá di Pisa - Dipartimento di Matematica

LOGICA

Simmaco Di Lillo
dsimmaco@gmail.com

Rielaborazione delle lezioni di
A.Berarducci

a.a. 2020-21

LOGICA PROPOSIZIONALE

- Un LINGUAGGIO L è un insieme di SIMBOLI dette VARIABILI PROPOSIZIONALI

- Le L-FORMULE sono definite INDUTTIVAMENTE
  - le variabili proposizionali (ATOMICHE)
  - Se ψ, ϕ sono L-formule lo sono
    $(\psi \wedge \psi)$
    $(\psi \vee \psi)$
    $(\psi \rightarrow \psi)$
    $\neg\psi$

- Una VALUTAZIONE BOOLEANA è una funzione

$$M : L \rightarrow \{0,1\}$$

tale funzione si estende a $\bar{M}$ che associa vero (1) o falso (0) alle L-formule seguendo le tavole di verità

- Una L-TEORIA è un insieme di L-formule dette ASSIOMI della TEORIA

- Se Γ è una L-teoria, un MODELLO di Γ è una valutazione M che rende vere tutte le formule di Γ

- Sia ϕ una L-formula e Γ una L-teoria. ϕ è CONSEGUENZA LOGICA di Γ se ogni modello di Γ rende vera ϕ.
In tal caso scriveremo $\Gamma \models \phi$

Ecco le regole di inferenza

(Ax) $T, \phi \vdash \phi$

(Wk) $\dfrac{T \vdash \phi}{T, \alpha \vdash \phi}$

($\vdash \wedge$) $\dfrac{T \vdash \alpha \quad T \vdash \beta}{T \vdash \alpha \wedge \beta}$ ($\wedge \vdash$) $\dfrac{T, \alpha \vdash \phi}{T, \alpha \wedge \beta \vdash \phi}$

($\vdash \vee$) $\dfrac{T \vdash \alpha}{T \vdash \alpha \vee \beta}$ ($\vee \vdash$) $\dfrac{T, \alpha \vdash \gamma \quad T, \beta \vdash \gamma}{T, \alpha \vee \beta \vdash \gamma}$

($\vdash \rightarrow$) $\dfrac{T, \alpha \vdash \gamma}{T \vdash \alpha \rightarrow \gamma}$ (MP) $\dfrac{T \vdash \alpha \quad T \vdash \alpha \rightarrow \beta}{T \vdash \beta}$

($\vdash \bot$) $\dfrac{T \vdash \alpha \quad T \vdash \neg\alpha}{T \vdash \bot}$ ($\bot$) $\dfrac{T \vdash \bot}{T \vdash \alpha}$

($\neg \vdash$) $\dfrac{T \vdash \alpha}{T, \neg\alpha \vdash \bot}$ ($\vdash \neg$) $\dfrac{T, \alpha \vdash \bot}{T \vdash \neg\alpha}$

(RAA) $\dfrac{T, \neg\alpha \vdash \bot}{T \vdash \alpha}$

Una DIMOSTRAZIONE è una successione di coppie (detti GIUDIZI) $\langle (T_1, \phi_1), \ldots, (T_n, \phi_n) \rangle$ tali che $\forall i \leq n$:

- $T_i \ni \phi_i$ è un assioma
- $\exists j < i$ $\dfrac{T_j \vdash \phi_j}{T_i \vdash \phi_i}$ è istanza regola
- $\exists j_1, j_2 < i$ $\dfrac{T_{j_1} \vdash \phi_{j_1} \quad T_{j_2} \vdash \phi_{j_2}}{T_i \vdash \phi_i}$ istanza regola

Scriveremo $T \vdash_{DN} \phi$ se esiste una dimostrazione $\langle (T_1, \phi_1), \dots, (T_m, \phi_m) \rangle$ dove

$$T_m \subseteq T \text{ e } \phi_m = \phi$$

Esempi

(i) $A \wedge B \vdash_{DN} A \vee B$

(1) $A \vdash A$

(2) $A \wedge B \vdash A$

(3) $A \wedge B \vdash A \vee B$

(ii) $\neg\neg A \vdash_{DN} A$

(1) $\neg A \vdash \neg A$

(2) $\neg A, \neg\neg A \vdash \bot$

(3) $\neg\neg A \vdash A$

(iii) $\vdash_{DN} A \vee \neg A$

(1) $A \vdash A$

(2) $A \vdash A \vee \neg A$

(3) $A, \neg(A \vee \neg A) \vdash \bot$

(4) $\neg(A \vee \neg A) \vdash \neg A$

(5) $\neg A \vdash \neg A$

(6) $\neg A \vdash A \vee \neg A$

(7) $\neg A, \neg(A \vee \neg A) \vdash \bot$

(8) $\neg(A \vee \neg A) \vdash A$

(9) $\neg(A \vee \neg A) \vdash \bot$

(10) $\vdash A \vee \neg A$

Teorema (correttezza)

$$T \vdash \varphi \Rightarrow T \models \varphi$$

Induzione sulla lunghezza della dimostrazione.
Il teorema si riconduce a dimostrare che le regole di inferenza sono corrette:
"rimpiazzando nelle regola $\models$ al posto di $\vdash$, il giudizio al di sotto della barra, è vero ogni qual volta lo sono quelli al di sopra"

Lemma: la regola $\dfrac{T \vdash \alpha \quad T \vdash \alpha \to \beta}{T \vdash \beta}$ è corretta

Sia $v \in Mod(T)$ allora $\bar{v}(\alpha) = 1$ e $\bar{v}(\alpha \to \beta) = 1$
usando le tavole di verità si ha $\bar{v}(\beta) = 1$

Lemma: la regola $\dfrac{T, \alpha \vdash \beta}{T \vdash \alpha \to \beta}$ è corretta

Sia $v \in Mod(T)$:

- Se $v(\alpha) = 1$ allora $v \in Mod(T, \alpha) \subseteq Mod(\beta)$ dunque $v(\beta) = 1$ e per le tavole $\bar{v}(\alpha \to \beta) = 1$
- Se $v(\alpha) = 0$ allora dalle tavole $\bar{v}(\alpha \to \beta) = 1$

Lemma: La regola $\dfrac{T \vdash \bot}{T \vdash \alpha}$ è corretta

Poiché $Mod(\bot) = \emptyset \Rightarrow Mod(T) = \emptyset$
ora $\forall \alpha$ vale $\emptyset \subseteq Mod(\alpha)$

Una L-teoria si dice <u>coerente</u> se $T \nvdash \perp$

<u>Prop</u> : I seguenti fatti sono equivalenti

(i) T è incoerente

(ii) $\exists\, \alpha$ L-formula $T \vdash \alpha$, $T \vdash \neg\alpha$

(iii) $\forall$ " " " " " " " "

(i) $\Rightarrow$ (iii) È la regola $\dfrac{T \vdash \perp}{T \vdash \alpha}$

(iii) $\Rightarrow$ (ii) ovvio

(ii) $\Rightarrow$ (i) È la regola $\dfrac{T \vdash \alpha \quad T \vdash \neg\alpha}{T \vdash \perp}$

Una L-teoria si dice COMPLETA se è coerente e $\forall \varphi$ L-formula $T \vdash \varphi$ o $T \vdash \neg\varphi$

Una L-teoria si dice COERENTE MASSIMALE se è coerente e non è contenuta propriamente in una teoria coerente.

Lemma : Sia T coerente, φ una L-formula

(i) $T \nvdash \varphi \Rightarrow T, \neg\varphi$ coerente

(ii) $T \nvdash \neg\varphi \Rightarrow T, \varphi$ coerente

(iii) T, φ oppure $T, \neg\varphi$ sono coerenti

(i) Se $T, \neg\varphi$ fosse incoerente $T, \neg\varphi \vdash \perp$ da cui per una regola $T \vdash \varphi$

(iii) $T, \varphi \vdash \perp$ e $T, \neg\varphi \vdash \perp \Rightarrow \begin{matrix} T \vdash \varphi \\ T \vdash \neg\varphi \end{matrix} \Rightarrow T \vdash \perp$ $\square$

Lemma (di Lindenbaum) Ogni L-teoria T coerente è contenuta in una teoria T' coerente massimale

(ZFC) Sia $\mathbb{P} = \{T' : T'$ L-teoria $T \subseteq T'\}$ e su $\mathbb{P}$ consideriamo l'ordine dato dall'inclusione. Mostriamo che ogni catena $(T_i \mid i \in I)$ ammette un maggiorante. Se $\bigcup T_i \vdash \bot$ allora per completezza sintattica $\exists S \subseteq \bigcup T_i$ finito $S \vdash \bot$. Poiché sono una catena $S \subseteq T_n \Rightarrow T_n \vdash \bot$ ↯
Dunque $\mathbb{P}$ ammette un elemento massimale □

Se $|L| = \aleph_0$ non serve l'assioma della scelta. Fissiamo $\{\varphi_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ un'enumerazione delle L-formule
Sia $T_0 = T$

$$T_{n+1} = \begin{cases} T_n \cup \{\varphi_n\} & \text{se coerente} \\ T_n \cup \{\neg\varphi_n\} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$\bigcup T_n$ è l'elemento cercato

□

Una teoria T si dice DEDUTTIVAMENTE CHIUSA se $T \vdash \varphi \Leftrightarrow T \in \varphi$

Lemma: T coerente massimale $\Rightarrow$ deduttivamente chiusa

Sia $T \vdash \varphi$ allora T, φ è coerente, sennò $T, \varphi \vdash \perp \Rightarrow T \vdash \neg\varphi$ da cui $T \vdash \perp$ $(T \vdash \varphi)$
Poiché T coerente massimale $T \cup \{\varphi\} \subset T$ $\square$

Lemma: T coerente massimale $\Rightarrow$ T completa
Sia φ con $T \nvdash \varphi$ e $T \nvdash \neg\varphi$.
Allora per un lemma $T \cup \{\varphi\}$ e $T \cup \{\neg\varphi\}$ sono coerenti. Per massimalità $\varphi, \neg\varphi \in T$.
Poiché T deduttivamente chiusa $\lightning$ $\square$

Lemma: T coerente massimale $\Rightarrow$ T ha un modello
Sia $M: L \to \{0,1\}$ con $M(A) = \begin{cases} 1 & \text{se } A \in T \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

è una buona definizione poiché T completa e deduttivamente chiusa.
Mostriamo $\forall \varphi$ L-formula $\varphi \in T \Rightarrow M(\varphi) = 1$
- φ atomica ovvia
- Si considerano i vari casi ~~[illegible]~~ $\beta \in T$
- $\alpha \vee \beta \in T \Rightarrow T \vdash \alpha$ oppure $T \vdash \beta$
$\qquad \overset{\shortparallel}{M(\alpha) = 1} \qquad \overset{\shortparallel}{M(\beta) = 1}$

In modo analogo ...

Lemma : T coerente $\Rightarrow$ T ha un modello

Per Lindenbaum $\exists S \supseteq T$ L-teoria coerente massimale. Per quanto visto S ha un modello M. M è anche modello per T $\square$

Oss Serve il passaggio "coerente massimale"

$T = \{ A \vee B \}$ ora $A \notin T$ $M(A) = 0$
$B \notin T$ $M(B) = 0$

ma M non è un modello di T

Teorema (di completezza)

$$T \models \varphi \Rightarrow T \vdash \varphi$$

Se $T \nvdash \varphi$ allora $T, \neg\varphi$ è coerente. Dunque $T, \neg\varphi$ ha un modello M.

$M \in Mod(T)$ ma $M \notin Mod(\varphi)$ infatti $M(\varphi) = 0$

Sia $G = (V, E)$ un grafo non orientato

Una colorazione su k colori è una funzione

$$c : V \to \{1, \dots, k\} \quad c(x) \neq c(y) \text{ se } x E y$$

Teorema: Un grafo non orientato è k-colorabile

$$\Updownarrow$$

Tutti i suoi sottografi sono k-colorabili

Sia $L_G = \{ c_{ik} : i \in V \; k \in \{1, 2, 3\} \}$

Consideriamo la L_G-teoria T_G:

Per ogni vertice i il seguente è un assioma

$$c_{i1} \vee c_{i2} \vee c_{i3}$$

Per ogni vertice i e per ogni $i \neq j \in \{1,2,3\}$ il seguente assioma

$$c_{ik} \to \neg c_{jk}$$

Per ogni vertice k il seguente è un assioma

$$(k' E k) \to (c_{1k} \to \neg c_{1k'})$$

Ogni modello induce una colorazione e viceversa

Allora vale

$$\begin{array}{ccc} T_G \text{ soddisfacibile} & \Leftrightarrow & T' \subseteq T_G \text{ finito soddisfacibile} \\ \Updownarrow & & \Uparrow \star \\ G \text{ colorabile} & \to & \text{Ogni sottografo è colorabile} \end{array}$$

$\star$ Sia $V' = \{ i \in V \mid \text{in } T' \text{ viene menzionato } c_{ik} \}$

Sia $c' : V' \to \{1, 2, 3\}$ una colorazione

la estendo ponendo $c'(j) = 1$ se $j \notin V'$

Pongo $M'(c_{ik}) = 1 \Leftrightarrow c'(i) = k$

allora $M' \models T'$ $\square$

Prop Sia $L = \{R(\cdot,\cdot)\}$ il linguaggio dei grafi
Non esiste una L-teoria T i cui i modelli siano tutti e soli i grafi connessi

Per assurdo una tale T esiste. Sia $L' = L \cup \{a,b\}$ dove a,b sono simboli di costanti.
Ora sia $\varphi_n \equiv$ "distanza tra a e $b \geq n$" L'-formula
Sia $T' = T \cup \{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una L' teoria
$\forall\, T'' \subseteq T'$ finito si ha $T'' \subseteq T \cup \{\varphi_{n_i}\}_{i \in J}$ con J finito
Posto $N = \max_{i \in J} \{n_i\}$ otteniamo che T'' ha un modello: a —·—·····— b distanti $N+1$

Dunque $\forall\, T'' \subseteq T'$ finito $T'' \nvdash \bot \Rightarrow T' \nvdash \bot$
Da cui T' ha un modello! Ma a e b non possiamo essere nella stessa componente connessa!

LOGICA DEL PRIMO ORDINE

Un LINGUAGGIO L è un insieme di simboli divisi in
(·) simbolo COSTANTE
(·) simbolo FUNZIONE
(·) simbolo RELAZIONE

Una L-struttura M consiste in
- insieme non vuoto il DOMINIO
- una corrispondenza $c \to M(c^M)$
- " " $f \to f^M$
- " " $R \to R^M$

Definiamo induttivamente gli L-TERMINI
- le VARIABILI sono L-termini
- le COSTANTI sono L-termini
- Se $t_1, \dots, t_n$ sono L-termini e f è un simbolo di funzione n-aria $f(t_1, \dots, t_n)$ è un L-termine

Definiamo induttivamente le L-formule

ATOMICHE
- Se t_1, t_2 sono termini $t_1 \doteq t_2$ è L-formula
- Se $t_1, \dots, t_n$ termini e R relazione n-aria $R(t_1, \dots, t_n)$ è una L-formula
- Se ψ, ϕ sono L-formule, lo sono $\psi \wedge \phi$, $\neg\psi$, ..
- Se ψ è L-formula e x variabile, $\forall x \psi$, $\exists x \psi$ è una L-formula

Una VALUTAZIONE in M delle variabile $x_1, .. x_n$ è una funzione $v: \{x_1, .., x_n\} \to dom(M)$

Sia M una struttura e v una valutazione definiamo l'INTERPETRAZIONE del TERMINE t

- $t = x$ variabile $M(t(v)) = v(x)$
- $t = c$ simbolo costante $M(c(v)) = c^M$
- $t = f(t_1, .., t_n)$ allora $M(t(v)) = f^M(M(t_1(v)), .., M(t_n(v)))$

Definiamo l'INTERPETRAZIONE delle FORMULE:
Sia ϕ una L-formula, scriveremo $M \models \phi(v)$ se
- $\phi = (t_1 \doteq t_2)$ se $M(t_1(v)) = M(t_2(v))$
- $\phi = R(t_1, .., t_n)$ se $R^M(M(t_1(v)), .., M(t_n(v))) = 1$
- ϕ combinazione booleana (tavole verità)
- $\phi = \forall x \psi$ se per ogni $a \in dom(M)$ $M \models \psi(a/x, v)$
- $\phi = \exists x \psi$ se esiste $a \in dom(M)$ $M \models \psi(a/x, v)$

Sia T una L-TEORIA diremo $T \models \varphi$
se per ogni (M, v) vale $M(T(v)) = 1 \Rightarrow M(\varphi(v)) = 1$

$$\underset{\textstyle M \models T(v)}{\overset{\parallel\!|}{}} \quad \Rightarrow M \models \varphi(v)$$

Definiamo la SOSTITUZIONE di TERMINE come segue

- t sostituibile in $\alpha \vee \beta$ se lo è in α e in β
  in tal caso $(\alpha \vee \beta)[t/x] = \alpha[t/x] \vee \beta[t/x]$
  In modo analogo per gli altri connettivi
- t sostituibile in $\forall x \varphi$ se t non contiene x

$(\forall x \psi)[t/x] = \forall x \alpha$
$(\exists x \psi)[t/x] = \exists x \alpha$
$(\forall y \varphi)[t/x] = \forall y (\varphi[t/x])$

Oltre alle regole "vecchie" aggiungiamo

- $\dfrac{T \vdash \varphi}{T \vdash \forall x \varphi}$ se x non occorre libero in T

- $\dfrac{T \vdash \forall x \varphi}{T \vdash \varphi[t/x]}$ se t sostituibile a x in φ

$L = \{0, 1, +, \cdot, <\}$ $T = TR(\mathbb{R})$ $\varphi = \exists y \; y < x$
ora $T \vdash \forall x \varphi$ ma $T \nvdash \exists y \exists y \; y < y$
y non è sostituibile a x in φ

- $\dfrac{T \vdash \varphi[t/x]}{T \vdash \exists x \varphi}$ dove t sostituibile

- $\dfrac{T, \varphi \vdash \gamma}{T, \exists x \varphi \vdash \gamma}$ se x non è libero in T, γ

- $\vdash t \doteq t$
- $x \doteq y \quad \varphi[x/u] \vdash \varphi[y/u]$ x, y sostituibile

Teorema: La regola $\dfrac{T \vdash \phi}{T \vdash \forall x \phi}$ dove $x \notin VL(T)$

è una regola corretta

Supponiamo $T \models \phi$.

Sia (M, v) tali che $M \models T(v)$ allora

$M \models \forall x \phi\,(v) \iff \forall b \in M \quad M \models \phi\,(v(b/x))$

Poiché $x \notin VL(T)$ si ha $M \models T\,(v(b/x))$

e dunque da $T \models \phi$ si ha $M \models \phi\,(v(b/x))$

Teorema: La regola $\dfrac{T, \varphi \vdash \gamma}{T, \exists x \varphi \vdash \gamma}$ se $x \notin VL(T, \gamma)$

è una regola corretta

Sia (M, v) tali che $M \models (T, \exists x \varphi)(v)$

ora $M \models \exists x \varphi\,(v) \iff \exists a \in M \quad M \models \varphi\,(v(a/x))$

Poiché $x \notin VL(T)$ e $M \models T(v)$ allora $M \models T(v(a/x))$

Abbiamo dunque $M \models (T, \varphi)\,(v(a/x))$ e

avendo supposto $T, \varphi \models \gamma$ si ha

$M \models \gamma\,(v(a/x)) \implies M \models \gamma(v)$ poiché $a \notin VL(\gamma)$

Lemma: Sia φ L-formula, t L-termine sostituibile
Sia M struttura e v una valutazione
$$M \models \varphi[t/x](v) \Leftrightarrow M \models \varphi(v(a/x))$$
dove $a = M(t(v))$

Ovvio per φ atomica e si conserva per comb. booleane
· $\varphi = \forall y\, \theta$ (se $y = x$ allora la sost è vacua)
con $y \neq x$
$M \models (\forall y\, \theta)[t/x](v) \Leftrightarrow M \models \forall y\, (\phi[t/x])(v) \Leftrightarrow$
$\forall b \in M \quad M \models \phi[t/x](v(b/y)) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \forall b \in M \quad M \models \phi\, (v(b/y, a'/x))$ con $a' = M(t(v(b/y)))$
Ora t è sostituibile a $\forall y\, \theta \Rightarrow t$ non contiene la y. Quindi $a' = a$ $\square$

Lemma: Se t è sostituibile a x in ϕ allora
$$\models \forall x\, \phi \rightarrow \phi[t/x]$$

$M \models \forall x\, \phi\, (v) \Leftrightarrow \forall b \in M \quad M \models \phi(v(b/x))$
Ora se $b = M(t(v))$ allora
$M \models \forall x\, \phi\, (v) \Rightarrow M \models \phi(v(b/x))$
$\Rightarrow M \models \phi[t/x](v)$
lemma sopra $\square$

Corollario: La regola $\dfrac{T \vdash \forall x \phi}{T \vdash \phi[t/x]}$ con t sost a x in ϕ
è una regola corretta

Corollario: La regola $\dfrac{T \vdash \varphi[t/x]}{T \vdash \exists x\, \varphi}$ se t sostituibile a x in φ

è una regola corretta

Sia (M, v) tale che $M \models T(v)$.

Se assumo $T \models \varphi[t/x]$ allora vale

$M \models \varphi[t/x](v) \iff M \models \varphi(v(b/x))$

con $b = M(t(v))$

Ora $M \models \varphi(v(b/x)) \iff \exists b \in M \quad M \models \varphi(v(b/x)) \Rightarrow$

$\Rightarrow M \models \exists x\, \varphi(v)$ $\square$

Co

Una L-struttura è RICCA (di termini) se per ogni L-formula chiusa $\exists x\, \varphi(x)$ esiste un L-termine chiuso t tale che

$$M \models \exists x\, \varphi(x) \rightarrow \varphi[t/x]$$

Esempio $L = \{0, 1, +, \cdot, <\}$ $\mathbb{R}$ non è ricco infatti $\mathbb{R} \models \exists x\, (x \cdot x = 1+1)$ ma non esistono L-termini t con $\mathbb{R} \models (x \cdot x = 1+1)[t/x]$

<u>Lemma</u> (delle costanti versione sintattica)
Sia $c \in L$ simbolo di costante con $c \notin T$

$$T \vdash \varphi[c/x] \Rightarrow T \vdash \forall x\, \varphi$$

Rimpiazzo nella dimostrazione $T \vdash \varphi[c/x]$ il simbolo c con una variabile z che non compare nella dimostrazione ottenendo $T \vdash \varphi[z/x]$ e uso generalizzazione

Lemma (delle costanti versione semantica)
Sia $c \in L$ simbolo di costante con $c \notin T$

$$T \models \varphi[c/x] \Rightarrow T \models \forall x\, \varphi$$

Se esiste un modello M di T e $m \in M$ tale che non valga $\varphi[m/x]$. Modifico M in modo che $c^M = m$ ottenendo (M, m) vale $\neg\varphi[c/x]$. Ma in questo nuovo modello valgono tutti gli assiomi di T $\lightning$

Una L-teoria chiusa T si dice HENKIN se per ogni L-formula chiusa $\exists x\, \varphi(x)$ esiste $c \in L$ con $T \vdash \exists x\, \varphi(x) \to \varphi(c)$

Lemma (1-Step Henkinizzation)
Sia T una L-teoria e $c \notin L$.
T coerente $\Rightarrow$ $T \cup \{\exists x\, \phi \to \phi(c)\}$ è coerente

Ragionando per tautologia
$T, \exists x\, \phi \to \phi(c) \vdash \bot$ $\quad T \vdash \exists x\, \phi(x)$ e $T \vdash \neg \phi(c)$
Per il lemma delle costanti $T \vdash \neg \phi(c/x)$ ottengo
$T \vdash \forall x \neg \phi(x) \equiv T \vdash \neg \exists x\, \phi(x)$
Ottengo dunque $T \vdash \bot$ ↯

Teorema (Henkinizzazione)
Ogni L-teoria T coerente è contenuta in una teoria coerente di Henkin T' in un linguaggio $L' \supseteq L$

$L^* = L \cup \{c_\varphi \mid \varphi \in L\text{-formula},\ VL(\varphi) \subseteq \{x\}\}$
$T^* = T \cup \{\exists x\, \varphi(x) \to \varphi(c_\varphi) \mid \varphi \in L\text{-formula},\ VL(\varphi) \subseteq \{x\}\}$
T^* è coerente per compattezza.
Pongo $\begin{cases} T_0 = T^* \\ T_{n+1} = T_n^* \end{cases}$ e $T' = \bigcup T_n$

T' è di Henkin (una formula $\exists x\, \varphi(x)$ contiene un numero finito di nuove costanti) e coerente per compattezza

Cor: Per ogni L-teoria coerente esiste
$L' \supseteq L$ e $T' \supseteq T$ con T' L'-teoria
coerente massimale di Henkin

Prima trovo $T_1' \supseteq T$ di Henkin in un linguaggio
$L' \supseteq L$. Usando il lemma di Lindenbaum
ottengo una L'-teoria T' massimale
(resta di Henkin perché il linguaggio non cambia)

Un insieme T di L-formule chiuse è di HINTIKKA
se valgono le clausole
(1) Se φ è atomica. T non può contenere φ e $\neg\varphi$
(2) $\varphi \wedge \psi \in T \Rightarrow \varphi \in T$ e $\psi \in T$
(2') $\neg(\varphi \wedge \psi) \in T \Rightarrow \neg\varphi \in T$ o $\neg\psi \in T$
(3) $\varphi \vee \psi \in T \Rightarrow \varphi \in T$ o $\psi \in T$
(3') $\neg(\varphi \vee \psi) \in T \Rightarrow \neg\varphi \in T$ e $\neg\psi \in T$
(4) $\exists x \varphi(x) \in T \Rightarrow \exists c \in L \ \varphi[c/x] \in T$ dab Henkin
(4') $\neg \exists x \varphi(x) \in T \Rightarrow \forall t$ L-termine chiuso $\neg\varphi[t/x] \in T$
(5) $\forall x \varphi(x) \in T \Rightarrow$ " " " " $\varphi[t/x] \in T$
(5') $\neg \forall x \varphi(x) \in T \Rightarrow \exists c \in L \ \neg\varphi[c/x] \in T$
(6) $\varphi \to \psi \in T \Rightarrow \neg\varphi \in T$ o $\psi \in T$
(6') $\neg(\varphi \to \psi) \in T \Rightarrow \varphi \in T$ e $\neg\psi \in T$
(7) $t \doteq t \in T$ $\forall t$ termine chiuso
(8) $\varphi[t/x]$, $t \doteq t' \in T \Rightarrow \varphi[t'/x] \in T$

Lemma: Coerente massimale Henkin ⇒ Hintikka

Andrebbero verificate le 8 clausole

(3) Se $\varphi \vee \psi \in T$ e non vale ($\varphi \in T$ o $\psi \in T$) essendo coerente massimale $\neg\varphi \in T$ e $\neg\psi \in T$

Dunque $\varphi \vee \psi, \neg(\varphi \vee \psi) \in T$ ✓

(4) Se $\exists x \varphi \in T$ poiché T è di Henkin $\exists c \in L$ $T \vdash \exists x \varphi \to \varphi[c/x]$ dunque deve accadere $(\exists x \varphi \to \varphi[c/x]) \in T$ (coerente max)

Dico che $\varphi[c/x] \in T$. Se così non fosse avrei $\neg\varphi[c/x] \in T$ ottenendo la contraddizione $\{\exists x \varphi, \exists x \varphi \vdash \varphi[c/x], \neg\varphi[c/x]\} \subseteq T$

$\square$

Sia E la relazione definita sui termini chiusi

$$t \, E \, t' \iff t \doteq t' \in T$$

Definiamo il MODELLO dei TERMINI dove

- $\text{dom } M_T = \text{termini chiusi}/_E$
- $f^M([t_1], \dots, [t_n]) = [f(t_1, \dots, t_n)]$
- $R^M([t_1], \dots, [t_n]) = 1 \iff [R(t_1, \dots, t_n)] \in T$
- $c^M = [c]$

Lemma: $t^M = [t]$

Induzione sulla lunghezza di t

$$[f(t_1, \dots, t_n)]^M = f^M(t_1^M, \dots, t_n^M) = f^M([t_1], \dots, [t_n]) =$$
$$= [f(t_1, \dots, t_n)]$$

Lemma: M_T è un modello di T

Mostriamo $\varphi \in T \Rightarrow M_T \models \varphi$

(·) φ ATOMICA - $\varphi = t_1 \doteq t_2 \in T \Rightarrow t_1 E t_2$

$\Rightarrow M \models t_1 \doteq t_2$

- $\varphi = R(t_1, .. t_n) \in T$

$R^M([t_1], .., [t_n])$ vero

$R^M(t_1^M, .., t_n^M)$ vero

$M \models R(t_1, .., t_n)$

(·) $\varphi = \alpha \vee \beta \in T \Rightarrow \alpha \in T$ o $\beta \in T$

$M_T \models \alpha$ o $M_T \models \beta \Rightarrow M_T \models \alpha \vee \beta$

(·) $\exists x \varphi \in T \Rightarrow$ esiste $c \in L$ $\varphi[c/x] \in T$

$\Rightarrow M \models \varphi[c/x] \Rightarrow M \models \exists x \varphi$

(·) $\forall x \varphi \in T \Rightarrow$ per ogni t L-termine chiuso

$\varphi[t/x] \in T \Rightarrow M \models \varphi[t/x]$

Teorema (completezza) $T \models \varphi \Rightarrow T \vdash \varphi$

Se $T \nvdash \varphi \Rightarrow T, \neg\varphi$ coerente $\Rightarrow M \models T, \neg\varphi$

$T \not\models \varphi$ $\square$

Teorema. L.S ↓

Sia T una L-teoria. Se T ha un modello infinito. Esiste un modello M con $|M| = \aleph_0 \cdot |L|$

Il modello dei termini va bene

Teorema L.S ↑

Sia T una L-teoria. Se T ha un modello infinito. Per ogni cardinale $k \geq |L|$, T ha un modello di cardinalità k

Sia $L' = L \cup \{c_i\}_{i \in k}$ $T' = T \cup \{c_i \neq c_j\}_{\substack{i,j \in k \\ i \neq j}}$

Ogni $T'' \subseteq T'$ finito ha un modello (T ha un modello) dunque T'' è coerente

Sia M' un modello di T', applicando LS ↓ alla L'-teoria T ottengo la tesi $\square$

ARITMETICA Q di ROBINSON

$L = \{0, s, +, \cdot\}$

$Q_1 : s(x) \doteq s(y) \rightarrow x \doteq y$

$Q_2 : s(x) \neq 0$

$Q_3 : x \neq 0 \rightarrow \exists y \ \ x \doteq s(y)$

$Q_4 : x + 0 = x$

$Q_5 : x + s(y) \doteq s(x+y)$

$Q_6 : x \cdot 0 \doteq 0$

$Q_7 \ \ x \cdot s(y) = x \cdot y + x$

Oss Q non è completo $\quad Q \nvdash \forall z \, \text{Pari}(z) \vee \text{Dispari}(z)$

$Q \nvdash \neg \forall z \, \text{Pari}(z) \vee \text{Dispari}(z)$

dove $\text{Pari}(z) = \exists u \, (u + u \doteq z)$ $\quad$ [prendo x in $\mathbb{Z}_+[x]$]

$\text{Dispari}(z) = \exists u \ \ z = s(u)$

Definiamo per induzione nella metateoria una funzione $\overline{} : \mathbb{N} \rightarrow L\text{-termini}$

$n \rightarrow \overline{n}$

con $\overline{0}$ è il termine 0

$\overline{n+1}$ è il termine $s(\overline{n})$

Un termine nell'immagine si chiama NUMERALE

Lemma: $\forall a,b,c \in \mathbb{N}$ se $a+b=c \Rightarrow Q \vdash \bar{a}+\bar{b}=\bar{c}$

Induzione nella metateoria su b

$b=0 \qquad Q \vdash \forall x\,(x+0=x)$ Assioma

$Q \vdash \bar{a}+\bar{0}=\bar{a}$

Assumo che valga per b. In $\mathbb{N}$ $a+b+1=c$

$$Q \vdash \bar{a}+(\overline{b+1}) = \bar{a}+s(\bar{b})$$
$$= s(\bar{a}+\bar{b})$$
$$Q \vdash (\bar{a}+\bar{b}) = \overline{a+b} \quad \text{(induzione)}$$
$$Q \vdash s(\bar{a}+\bar{b}) = s(\overline{a+b})$$
$$= \overline{a+b+1}$$
$$Q \vdash \bar{a}+\overline{b+1} = \overline{a+b+1}$$

Lemma $\forall a,b,c \in \mathbb{N}$ se $ab=c \Rightarrow Q \vdash \bar{a}\cdot\bar{b}=\bar{c}$

Induzione nella metateoria su b

$b=0 \qquad Q \vdash a\cdot 0 = 0$

$$Q \vdash \bar{a}\cdot(\overline{b+1}) = \bar{a}\cdot s(\bar{b})$$
$$= \bar{a}\cdot\bar{b}+\bar{a}$$
$$= \overline{a\cdot b+a}$$
$$= \overline{a\cdot(b+1)}$$

Corollario $\forall$ L-termine chiuso. $\exists n \in \mathbb{N}$

$$Q \vdash t = \bar{n}$$

Induzione sulla lunghezza di t

- $t=0$ (uso $\bar{0}=0$)
- $t=st'$ $\quad Q \vdash t'=\bar{m} \qquad Q \vdash st'=\overline{m+1}$
- $t=t_1+t_2$
- $t=t_1\cdot t_2$ $\Big\}$ uso lemmi precedenti

$\square$

Lemma $a \neq b$ in $\mathbb{N} \Rightarrow Q \vdash \overline{a} \neq \overline{b}$

Posso assumere $a < b$

- $0 = a < b$ $\quad Q \vdash \forall x \; 0 \neq S(x)$

  $Q \vdash \overline{a} \neq \overline{b}$

- $0 < a < b$ $\quad Q \vdash \overline{a-1} \neq \overline{b-1}$

  $Q \vdash \overline{a} \neq \overline{b}$ (S è iniettivo)

$\square$

Lemma Siano t_1, t_2 termini chiusi

$Q \vdash t_1 = t_2$ o $Q \vdash t_1 \neq t_2$

MODELLI STANDARD & NON STANDARD

$x \in M$ è STANDAR se è l'interpretazione di un numerale (termine chiuso)

$x \in M$ è NON-STANDAR se non è standard

Oss Esiste $\varphi(x)$ L-formula con $\forall M \models Q$

$\forall a \in M \quad [M \models \varphi(a)] \Leftrightarrow a$ standard ?

No Altrimenti PA^1 avrebbe solo modelli isomorfi a $\mathbb{N}$

Però in $\mathbb{Z}_+[x]$ esiste una formula che definisce i numeri standard

$\varphi(x) \equiv \forall y \leq x \; (\text{Pari}(y) \vee \text{Dispari}(y))$

Definisco $x \leq y \equiv \exists z \ (z + x = y)$

Prop $Q \models \forall x \ (x \leq \overline{0} \iff x = 0)$

In un modello di Q assumo $x \leq 0$ cioè z tale che $x + z = 0$ se $z = 0$ ottengo $x = 0$
se $z \neq 0$ $z = S(z')$ $0 = x + S(z') = S(x + z')$ ↯

Prop $Q \models \forall x \ (x \leq \overline{n+1} \iff x \leq \overline{n} \vee x = \overline{n+1})$
Induzione su n nella metateoria
$x \leq \overline{n+1} \iff \exists z \quad x + z = \overline{n+1}$
se $z = 0$ $x = \overline{n+1}$
se $z \neq 0$ $z = S(z')$ $x + z = x + S(z') = S(x + z) = S(\overline{n})$
da cui $x + z = \overline{n} \iff x \leq \overline{n}$
L'inverso è facile

Data una L-struttura M.

- $X \subseteq M^n$ si dice $\emptyset$-DEFINIBILE se esiste una L-formula $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ tale che
$$X = \{(a_1, \dots, a_n) \in M^n \mid M \models \varphi(a_1/x_1, \dots, a_n/x_n)\}$$
cerchio raggio 1 $(M = \mathbb{R})$
- $X \subseteq M^n$ si dice DEFINIBILE se esistono dei parametri $b_1, \dots, b_k = \bar{b}$ e una L-formula $\varphi(x_1, \dots, x_n, \bar{y})$
$$X = \{(a_1, \dots, a_n) \in M \mid M \models (a_1/x_1, \dots, a_n/x_n, \bar{b}/\bar{y})\}$$
cerchio raggio π $(M = \mathbb{R})$

- sia $L = \{0, S, +, \cdot\}$ e T una L-teoria
$X \subseteq \mathbb{N}^k$ è BINUMERABILE in T se esiste $\varphi \in$ L-formule con $\forall (a_1, \dots, a_k) \in \mathbb{N}$
  - $(a_1, \dots, a_n) \in X \Rightarrow T \vdash \varphi(\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_k)$
  - $(a_1, \dots, a_n) \notin X \Rightarrow T \vdash \neg\varphi(\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_k)$

- Una L-formula $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ è determinata in T se $\forall (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{N}$ $T \vdash \varphi(\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n)$ o $T \vdash \neg\varphi(\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n)$

Oss (I) X binumerabili in T $\Rightarrow$ X definibile in $\mathbb{N}$
$\mathbb{N} \in Mod(T)$ $(T = Q)$

(II) X definibile in $\mathbb{N}$ $\Leftrightarrow$ X binumerabile in $Th(\mathbb{N})$

$\Delta_0 := \text{Atomiche} \mid \Delta_0 \vee \Delta_0 \mid \Delta_0 \wedge \Delta_0 \mid \neg \Delta_0 \mid \Delta_0 \to \Delta_0 \mid$

$\forall x \leq t\ \Delta_0 \mid \exists x \leq t\ \Delta_0$

termine senza x

<u>Lemma 1</u> $Q \vdash \forall x\ (x \leq \bar{0} \iff x = 0)$

$x \leq 0 \iff \exists z\ \ x + z = 0$

- $z = 0 \implies x = 0$
- $z \neq 0 \implies z = S(z')\ \ x + z' = S(x + z') = 0$ ↯

<u>Lemma 2</u> $\forall n\ \ Q \vdash \forall x\ (x \leq \overline{n+1} \iff x \leq \bar{m} \vee x = \overline{n+1})$

Induzione su n nella metateoria

$m = 0\quad x \leq 1 \implies x + z = \bar{1}$

- $z = 0 \implies x = 1$

$z = S(z') \implies x + z = S(z') = S(0)\ \ x + z' = 0 \iff x \leq 0$

$n \mapsto n+1\quad x \leq \overline{m+1} \implies$ ~~x~~

$x + z = \overline{m+1} = S(m)$

- $z = 0\quad x = \overline{m+1}$
- $z = S(z')\quad x + z' = m\quad x \leq m$

<u>Corollario</u> $\forall k \leq m\ \ Q \vdash \varphi(\bar{k}) \iff Q \vdash \forall k \leq \bar{m}\ \varphi(x)$

Teorema: Tutte le Δ_0 sono determinate in Q

Lemma: Ogni $\varphi \in \Delta_0$ CHIUSA equivale ad una $\overline{\varphi}$ chiusa senza quantificatori

Induzione: $\overline{\text{Atomiche}} = \text{Atomiche}$

$$\overline{\alpha \wedge \beta} = \overline{\alpha} \wedge \overline{\beta}$$

$$\dots \qquad \dots$$

se $Q \vdash t = \overline{n}$ allora

$$\overline{(\forall x \leq t)\, \varphi(x)} = \varphi(\overline{0}) \wedge \dots \wedge \varphi(\overline{n})$$

$$(\exists x \leq t)\, \varphi(x) = \varphi(\overline{0}) \vee \dots \vee \varphi(\overline{n})$$

Corollario Tutte le Δ_0 sono determinate

Induzione sulla complessità:

$\boxed{\wedge}$ Basta mostrare ~~che~~ i 4 casi

1) $Q \vdash \varphi(\overline{n}) \quad Q \vdash \theta(\overline{n}) \implies Q \vdash (\varphi \wedge \theta)(\overline{n})$

2) $Q \vdash \varphi(\overline{n}) \quad Q \vdash \neg\theta(\overline{n}) \implies Q \vdash \neg(\varphi \wedge \theta)(\overline{n})$

3) $Q \vdash \neg\varphi(\overline{n}) \quad Q \vdash \theta(\overline{n}) \implies Q \vdash \neg(\varphi \wedge \theta)(\overline{n})$

4) $Q \vdash \neg\varphi(\overline{n}) \quad Q \vdash \neg\theta(\overline{n}) \implies Q \vdash \neg(\varphi \wedge \theta)(\overline{n})$

Analogo per i connettivi booleani

$\forall x \leq t\ \varphi(x)$ ~~$\iff$~~ $\varphi(\overline{0}) \wedge \dots \wedge \varphi(\overline{n})$ dunque è determinato.

Se non è chiusa $\varphi(x_1, \dots x_m)$ è determinata se dati $e_1, \dots, e_m \in \mathbb{N}$

$Q \vdash \varphi(\overline{e_1}, \dots, \overline{e_m})$ o $Q \vdash \neg\varphi(\overline{e_1}, \dots, \overline{e_m})$

sono chiuse $\implies$ senza connettivi $\square$

Attenzione se φ non determinato in ...

$\mathbb{N} \models \neg\varphi \Rightarrow Q \nvdash \varphi$

__Corollario__ $Q \vdash \varphi \Leftrightarrow \mathbb{N} \models \varphi \quad \forall \varphi \in \Delta_0$

__Corollario__ Gli insiemi $\Delta_0^{\mathbb{N}}$ sono binumerabili in Q

$A \in \Delta_0^{\mathbb{N}} \Leftrightarrow A = \{ \bar{a} \in \mathbb{N} \mid \mathbb{N} \models \varphi(\bar{a}) \}$ con $\varphi \in \Delta_0$

- Se $a \in A$ poiché φ determinato in Q
  (i) $Q \vdash \varphi(\bar{a})$
  (ii) $Q \vdash \neg\varphi(\bar{a}) \Rightarrow \mathbb{N} \models \neg\varphi(\bar{a})$ ↯
- Se $a \notin A$ si procede come sopra. □

$\Sigma_1^0 := \Delta_0 \mid \exists x\, \Sigma_1^0 \mid \forall x \leq t\, \Sigma_1^0 \mid \exists x \leq t\, \Sigma_1^0$
$\qquad \Sigma_1^0 \wedge \Sigma_1^0 \mid \Sigma_1^0 \vee \Sigma_1^0$

__Teorema__ $\mathbb{N} \models \varphi \Leftrightarrow Q \vdash \varphi \quad \forall \varphi \in \Sigma_1^0$

NON SO NULLA SULLA NEGAZIONE (NON SONO DETERMINATE)

[$\Leftarrow$] banale

[$\Rightarrow$] Per quanto mostrato prima vale per $\varphi \in \Delta_0$

- $\varphi = \exists x\, \theta \qquad \mathbb{N} \models \exists x\, \theta \Rightarrow \exists m \in \mathbb{N}\ \mathbb{N} \models \theta(\bar{m})$
  $\underset{\text{induzione}}{\Rightarrow} Q \vdash \theta(\bar{m}) \Rightarrow Q \vdash \exists x\, \theta(x)$

- $\varphi = \forall x \leq t\, \theta \qquad \exists m \quad Q \vdash t = \bar{m}$
  $Q \vdash \forall x \leq t\, \theta(x) \leftrightarrow \theta(\bar{0}) \wedge \ldots \wedge \theta(\bar{m})$
  Per ipotesi $\mathbb{N} \models$ ... $\wedge \ldots \wedge \theta(\bar{m})$
  ovvero $\mathbb{N} \models \theta(\bar{0})$, e $\mathbb{N} \models \theta(\bar{1})$, ..., e $\mathbb{N} \models \theta(\bar{m})$
  $\Downarrow$
  $Q \vdash \theta(\bar{0}) \quad Q \vdash \theta(\bar{1}) \quad \ldots \quad Q \vdash \theta(\bar{m})$ □

Funzione BETA DI GODEL

$$\beta(c,d,i) = r \iff c \equiv r \pmod{d(i+1)+1}$$
$$0 \le r < d(i+1)+1$$

__Lemma__ ~~prov~~ Il grafico di β è $\Delta_0^{\mathbb{N}}$

$$(c,d,i,r) \in \Gamma(\beta) \iff \exists q \le c \;\; c = q\,[d(i+1)+1] + r \;\wedge$$
$$\wedge\; 0 \le r \le d(i+1)+1$$
$\square$

__Prop__ La β di Godel codifica le successioni finite ovvero $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall r_0, \dots, r_n \in \mathbb{N}$ $\exists c, d \in \mathbb{N}$ con

$$\beta(c,d,i) = r_i \quad \forall i \;\; 0 \le i \le n$$

La tesi equivale all'esistenza di c, d tali che

$$\begin{cases} c \equiv r_0 \mod (d+1) \\ c \equiv r_1 \mod (2d+1) \\ \vdots \\ c \equiv r_n \mod ((n+1)d+1) \end{cases}$$

Preso $d = k!$ con $k > r_0, r_1, \dots, r_n, n$ si ha che i moduli sono primi tra loro. Se così non fosse, $\exists p$ primo $p \mid id+1$ $p \mid jd+1$ $i > j$

Allora $p \mid (i-j)\,d \Rightarrow p \mid d \Rightarrow p \mid 1$ $\lightning$

$\downarrow$

infatti $p \mid (i-j) \Rightarrow p \mid d$ essendo $i-j \le n$

Scelgo c con il teorema cinese dei resti

$\square$

Possiamo dunque definire in L le abbreviazioni

$$\text{"}x^y = z\text{"} \equiv \exists c,d \ \beta(c,d,0) = 1 \wedge \beta(c,d,y) = z \wedge$$

$$\wedge \forall i < y \ \underbrace{\beta(c,d,i+1) = \beta(c,d,i)\cdot x}_{\equiv}$$

$$\exists u,v \ \beta(c,d,i+1) = u \wedge \beta(c,d,i) = v \wedge$$

$$\wedge \ u = v \cdot x$$

è una formula Σ_1^0, dunque

$$① \ \mathbb{N} \models \text{"}a^b = c\text{"} \Rightarrow Q \vdash \text{"}\bar{a}^{\bar{b}} = \bar{c}\text{"}$$

Proposizione ③ $\mathbb{N} \models \text{"}a^b = c\text{"} \Rightarrow Q \vdash \forall z\,[\text{"}\bar{a}^{\bar{b}} = z\text{"} \leftrightarrow z = \bar{c}]$

Assumiamo $a^b = c$ in $\mathbb{N}$ e sia $M \models Q$.

Sia $z \in M$ con $M \models \bar{a}^{\bar{b}} = z$ dunque $\exists c,d \in M$

$$M \models \beta(c,d,0) = 1 \wedge \beta(c,d,\bar{b}) = z \wedge \forall i < \bar{b} \ \beta(c,d,i+1) = \beta(c,d,i)\cdot \bar{a}$$

Per induzione su $b \in \mathbb{N}$ mostro $\beta(c,d,\bar{b}) = \bar{c}$

Lemma ② $\mathbb{N} \models \text{"}a^b \neq c\text{"} \rightarrow Q \vdash \text{"}\bar{a}^{\bar{b}} \neq \bar{c}\text{"}$

Mostriamo che ③ $\rightarrow$ ②

Se $a^b \neq c$ in $\mathbb{N}$, esiste $d \neq c$ con $a^b = d$ in $\mathbb{N}$

Da (3) $Q \vdash \forall z\,[\bar{a}^{\bar{b}} = z \leftrightarrow z = \bar{d}]$

$Q \vdash \bar{d} \neq \bar{c}$

$Q \vdash \bar{a}^{\bar{b}} \neq \bar{c}$

$f: \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ è BINUMERABILE se lo è il grafico

$f: \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ è BINUMERABILE FUNZIONALMENTE in Q se esiste $\varphi(x_1, \dots, x_k, y)$ con $\forall a_1, \dots, a_k, b$

① $f(a_1, \dots, a_k) = b \Rightarrow Q \vdash \varphi(\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_k, \bar{b})$

② $f(a_1, \dots, a_k) \neq b \Rightarrow Q \vdash \neg \varphi(\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_k, \bar{b})$

③ $f(a_1, \dots, a_k) = b \Rightarrow Q \vdash \forall y \, (\varphi(\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_k, y) \leftrightarrow y = \bar{b})$

Oss (2) segue da (3)

Oss In $M \models Q$ la relazione definita da φ è una funzione ristretto agli input standard

Corollario L'esponenziale è binumerabile funzionalmente in Q

Prop: $f, g: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ binumerabili funzionalmente. Allora anche $f \circ g$ lo è

Sia "$gx = y$" la formula che binumera funzionalmente g
" "$fx = y$" " " " " f

$(f \circ g)(x) = y \Leftrightarrow \exists z \, (\text{"}gx = z\text{"} \wedge \text{"}fz = y\text{"}) \equiv \Theta(x, y)$

Θ binumera funzionalmente $f \circ g$ infatti se $(f \circ g)(n) = m$

- Q dimostra che l'unico z tale che "$g(\bar{n}) = z$" è $z = \bar{k}$
- Q dimostra che l'unico y tale che "$f\bar{k} = y$" è $y = \bar{m}$

Quindi Q dimostra che l'unico y tale che $\exists z$ "$g(\bar{n}) = z$" $\wedge$ "$f(z) = y$" è $\bar{m}$ □

<u>Teorema</u>: siano h, g binumerabili funzionalmente in Q da formule Σ_1^0. Poniamo

$$\begin{cases} f(0, \bar{x}) = g(\bar{x}) \\ f(y+1, \bar{x}) = h(y, \bar{x}, f(y, \bar{x})) \end{cases}$$

Allora f è binumerabile funzionalmente da Σ_1^0

La formula cercata ~~che~~ è "$f(z,\bar{x}) = y$" definita da

$$\exists c, d \ (\beta(c,d,0) = g(\bar{x}) \wedge \beta(c,d,z) = y \ \wedge$$
$$\wedge \ \forall i < z \ \ \beta(c,d,i+1) = h(i, \bar{x}, \cancel{f}\beta(c,d,i)))$$

dove $\beta(c,d,i+1) = h(i, \bar{x}, \beta(c,d,i))$ abbreviamo

$\exists t, u \ \ \beta(c,d,i+1) = u \ \wedge \beta(c,d,i) = t \ \wedge$ "$u = h(i, \bar{x}, t)$"

Le funzioni PRIMITIVE RICORSIVE sono la più piccola classe di funzioni contenenti

- 0
- S
- π_i^n con $\pi_i^m(x_1, \dots, x_m) = x_i$

e chiuse per

- Composizione: $f_1, \dots, f_m \in PR$ $h \in PR$

$$f(x_1, \dots, x_m) \doteq h(f_1(x), \dots, f_m(x)) \text{ è } PR$$

- per ricorsione primitiva: $g, h \in PR$

$$\left.\begin{array}{l} f(0, \bar{x}) = g(\bar{x}) \\ f(n+1, \bar{x}) = h(n, \bar{x}, f(n, \bar{x})) \end{array}\right\} \Rightarrow f \text{ è } PR$$

Le seguenti funzioni sono PR

- Somma $\begin{cases} x + 0 = x \\ x + S(y) = S(x+y) \end{cases}$ Prodotto $\begin{cases} x \cdot 0 = 0 \\ x \cdot S(y) = x \cdot y + x \end{cases}$

- Esponenziale $\begin{cases} x^0 = 1 \\ x^{S(y)} = x^y \cdot x \end{cases}$ Fattoriale $\begin{cases} 0! = 1 \\ S(n)! = S(n)\, n! \end{cases}$

- Predecessore $\begin{cases} P(0) = 0 \\ P(x+1) = x \end{cases}$ $P(n+1) = h(n, P(n))$

$h(n, y) = n$

- Sottrazione troncata $x \dot{-} y = \begin{cases} x - y & \text{se } \geq 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

$$\begin{cases} x \dot{-} 0 = x \\ x \dot{-} S(y) = P(x \dot{-} y) \end{cases}$$

Lemma: Sia f PR allora lo sono le funzioni

(1) $g(y) = \prod_{x=0}^{y} f(x)$

(2) $g(y) = \prod_{x=0}^{y} f(x,y)$

(1) $\begin{cases} g(0) = f(0) \\ g(m+1) = g(m)\, f(m+1) \end{cases}$ è primitiva per ricorsione $h(n,m) = m \cdot f(Sm)$

(2) Consideriamo $\tilde{g}(y,z) = \prod_{x=0}^{y} f(x,z)$

Come sopra si mostra che $\tilde{g}(y,z)$ è PR.

Ora $g(y) = \tilde{g}(y,y)$ è PR in quanto composizione di PR □

Un PREDICATO (insieme) $P \subseteq \mathbb{N}^k$ è PRIMITIVO RICORSIVO se la sua funzione caratteristica è PR

Lemma: P, Q PR $\Rightarrow$ $(P \land Q)$, $(P \lor Q)$, $\neg P$ PR

Identifico $P(\bar{x})$ con $\bar{x} \in P$.

Osserviamo che vale $\chi_{P \land Q}(x) = \chi_P(x)\, \chi_Q(x)$

$\chi_{P \lor Q} = \chi_{\neg(\neg P \lor \neg Q)}(x)$

$\chi_{\neg P} = 1 \dot{-} \chi_P(x)$

dunque sono PR

Lemma: I quantificatori limitati preservano i PR

Sia P un predicato PR, $Q \equiv \forall x \leq y \; P(x)$ allora $\chi_Q(y) = \prod_{x=0}^{y} \chi_P(x)$. Per il lemma precedente $\chi_Q(y)$ è PR $\square$

Lemma: $\chi_=(a,b)$ è PR

Consideriamo la funzione $z(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x = 0 \\ 0 & \text{se } x \neq 0 \end{cases}$

è PR infatti $\begin{cases} z(0) = 1 \\ z(Sy) = 0 \end{cases}$ ora

$$a = b \iff z(a \dot{-} b) \wedge z(b \dot{-} a) \qquad \square$$

Corollario: $\Delta_0^{\mathbb{N}} \subset PR$

Teorema: Tutte le funzioni ricorsive sono binumerabili funzionalmente in $\mathbb{Q}$ da Σ_1^0

Abbiamo già mostrato che le funzioni bin. funz. sono chiuse per composizione e ricorsione. Manca da vedere che le "funzioni base" lo sono

- la funzione $O : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ $O(a_1, \dots, a_n) = 0$ è binumerata funzionalmente da $\varphi(x_1, \dots, x_n, y) = (y = 0)$
- la funzione successore è binumerata da $Sx = y$
- la funzione π_i^n è binumerata funzionalmente $\phi(x_1, \dots, x_n, y) = (x_i = y)$ $\square$

Corollario: Tutte le funzioni PR sono definibili in $\mathbb{N}$ da formule Σ_1^0

Lemma: Sia P un predicato PR e g_1, g_2 PR

Allora $f(x) = \begin{cases} g_1(x) & \text{se } P(x) \\ g_2(x) & \text{se } \neg P(x) \end{cases}$ è PR

$f(x) = \chi_P(x)\, g_1(x) + \chi_{\neg P}(x)\, g_2(x)$ è PR □

Prop Sia P un predicato PR. Sia

$$f(x) = \begin{cases} \min\{y < x : P(x,y)\} & \text{se esiste} \\ x & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Allora f è PR

Conviene introdurre $\tilde{f}(x,z) = \begin{cases} \min\{y < z \;\; P(x,y)\} \\ z \end{cases}$

$\tilde{f}$ è PR infatti è possibile definirlo come

$\tilde{f}(x,0) = 0$

$$\tilde{f}(x,z+1) = \begin{cases} \tilde{f}(x,z) & \text{se } \exists y < z \;\; P(x,y) \\ z & \text{se } \neg\exists y < z \;\; P(x,y) \wedge P(x,z) \\ z+1 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Posto h la funzione che distingue i casi

si ha h PR (lemma precedente) dunque $\tilde{f}$ PR

Ora $f(x) = \tilde{f}(x,x)$ è dunque PR

Corollario Sia P un predicato PR e

g una funzione PR.

$$f(x) = \begin{cases} \min\{y < g(x) : P(x,y)\} & \text{se esiste} \\ g(x) & \text{altrimenti} \end{cases}$$

è PR.

Sia h una funzione parziale. Definiamo l'operatore μ come segue

$$f(x) = \mu z\ [h(x,z)=0]$$

allora $f(x) = z \iff h(x,z)=0 \wedge \forall i < z\ \ h(i,z) \neq 0, \perp$

dunque è un operatore tra funzioni parziali

Le funzioni μ-RICORSIVE di KLEENE è la più piccola classe con $0, S, \pi_i^a$ e chiuse per

- composizione
- ricorsione primitiva
- operatore μ

Oss

- $f(x) = h(g_1(x), .., g_m(x))$ allora poniamo $f(x)\downarrow \iff g_1(x), .., g_m(x)\downarrow$ e $h(g_1(x), .., g_m(x))\downarrow$

- $\begin{cases} f(0) = a \\ f(n+1) = h(n, f(n)) \end{cases}$ allora poniamo

$$f(n)\downarrow \iff \forall i < n\ [\,f(i)\downarrow \text{ e } h(i, f(i))\downarrow\,]$$

Esempio

- $\pi_1^2(3, \perp) = \perp$
- $0\ \perp = \perp$

CODIFICHE

Sia $p(i)$ l'i-esimo numero primo.
È una funzione PR infatti

$$\begin{cases} p(0) = 2 \\ p(i+1) = \mu z \leq 2p(i)\ (z \text{ primo} \wedge z > p(i)) \end{cases}$$

definiamo

$$\langle a_0, \dots, a_n \rangle = \prod p(i)^{a_i+1} \qquad \langle \rangle = 1$$

tale codifica è iniettiva ma non surgettiva

m codifica $\iff \forall i \leq n\ \forall j \leq i\ [p(i) \mid m \rightarrow p(j) \mid m]$

L'estrazione $\pi : \mathbb{N}^2 \longrightarrow \mathbb{N}$ è PR

$$(i, \langle a_0, \dots, a_n \rangle) = \begin{cases} a_i & \text{se } i < n \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$\pi(i,s) = \begin{cases} \mu a \leq s\ \ p(i)^{a+1} \nmid s & s \neq 0 \\ 0 & \text{se } s = 0 \end{cases}$$

La concatenazione è PR

Sia $a = \langle a_1 \dots, a_n \rangle$ $b = \langle b_1, \dots, b_k \rangle$. Cerco un bound

per $\hat{ab} = \prod_{i \leq n} p(i)^{a_i} \prod_{j \leq k} p(n+j)^{j} \leq p(n+k)^{(n+k)\max\{a_i, b_i\}}$

$$\leq p(a+b)^{(a+b)^2}$$

Da cui $\hat{ab} = \mu z < p(a+b)^{(a+b)^2}$

$[\forall i \leq \ell(a)\ \pi(i,z) = a_i \wedge \forall j \leq \ell(b)\ \pi(\ell(a)+j, t) = b_j]$

dove $\ell(a) = \mu i < a\ \ p(i) \nmid a$

La macchina ha infiniti registri $R_0, \dots, R_n$ dove ogni R_i contiene un numero naturale (solo un numero finito di registri ha numeri non nulli)

Un PROGRAMMA P (per macchine a registri) è una lista finita $(I_1, \dots, I_s)$ di istruzioni che possono essere di 4 tipi

$$R_n := 0$$

$$R_n := R_n + 1$$

$$R_n := R_m$$

$$\text{se } R_n = R_m \text{ go to } q$$

(con la convenzione $q > s$ è una condizione di arresto)

Una funzione f parziale si dice CALCOLABILE se esiste un programma P che la calcola, cioè:

- $f(n) = \perp$ se il programma P con input n non termina
  $f(n) = b$ " " " " " " finisce b

Lemma Sia $\begin{cases} f(\bar{x}, 0) = g(x) \\ f(\bar{x}, y+1) = h(\bar{x}, y, f(x, y)) \end{cases}$

Se g e h sono calcolabili, lo sono anche f

Costruiamo una macchina che prende input $\bar{x}$ e y e da come output $z = f(\bar{x}, y)$

(1) $z := g(\bar{x})$

(2) $k := 0$

(3) se $k = y$ vai a (7)

(4) $z := h(\bar{x}, k, z)$

(5) $k := k+1$

(6) se $0 = 0$ vai a (3) $\square$

Teorema : $f: \mathbb{N}^n \to \mathbb{N} \cup \{\perp\}$

f μ-ricorsiva $\Leftrightarrow$ f calcolabile

Manca solo da provare h calcolabile $\Rightarrow$ $\mu z\ h(x,z) = 0$ è

(1) $z := 0$

(2) $u := h(x, z)$

(3) se $u = 0$ vai a (6)

(4) $z := z+1$

(5) se $z = z$ vai a (2)

Oss Una funzione calcolabile che non sappiamo calcolare

$$f(x) = \begin{cases} \mu y\ (y > x \wedge y \text{ primo} \wedge y+2 \text{ primo}) \text{ se esiste} \\ 0 \quad \text{se non esiste} \end{cases}$$

Per quello ovvio, P_m (con input $m > n$ da 0). Una funzione

Possiamo codificare i programmi P usando

$\ulcorner R_n := 0 \urcorner = 4n$

$\ulcorner R_n := R_n + 1 \urcorner = 4n+1$

$\ulcorner R_n = R_m \urcorner = 4 < n, m > + 2$

$\ulcorner$ se $R_n = R_m$ go to $i \urcorner = 4 < n, m, i > + 3$

Allora $\ulcorner P \urcorner = < \ulcorner I_1 \urcorner, \dots, \ulcorner I_s \urcorner >$

Possiamo dunque definire, dato $e \in \mathbb{N}$ φ_e^n:

$\varphi_e^n : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N} \cup \{\perp\}$ dove

- $\varphi_e(\bar{x}) = y$ se il programma P_e con input $\bar{x}$ termina con output y
- $\varphi_e(\bar{x}) = \perp$ se il programma P_e con input $\bar{x}$ non termina

Definiamo la FUNZIONE UNIVERSALE

$U^n : \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{N} \cup \{\perp\}$ dove

$(e, \bar{x}) \longrightarrow \varphi_e^n(\bar{x})$

La funzione U^n è calcolabile

"Decodifico per trovare il programma P_e, eseguo il programma P_e su input x"

Teorema (Problema della fermata)

La funzione $D : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ $D(m) = \begin{cases} \varphi_m(m)+1 & \text{se } \varphi_m(m)\downarrow \\ 0 & \text{se } \varphi_m(m)\uparrow \end{cases}$

Se fosse calcolabile $D = \varphi_e^1$. Poiché D totale anche φ_e lo è ma

$D(e) = \varphi_e(e) + 1 = D(e) + 1$! $\square$

Teorema (s.m.n) Dati $m, n \in \mathbb{N}$ esiste s PR

$\forall e, \bar{x}, \bar{y} \quad \varphi_e^{m+n}(\bar{x}, \bar{y}) = \varphi^m_{s(e,\bar{x})}(y)$

Per semplicità lo mostro per $m = n = 1$

Sia P_e il programma per $\varphi_e^2 : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ con R_1, R_2 registri di input.

$$P_{s(e,n)} = (R_1 := 0, \underbrace{R_1 := R_1 + 1, \dots, R_1 := R_1 + 1}_{n \text{ volte}}, P_e)$$

Ora $s(e,n) = \mu z <$ qualcosa PR

$[\pi(1, z) = \ulcorner R_1 := 0 \urcorner \land$

$\forall 1 < i < n+1 \quad \pi(i, z) = \ulcorner R_1 := R_1 + 1 \urcorner \land$

$\forall i \quad \pi(n+1+i, z) = \pi(i, e)]$

Corollario: Dato $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N} \cup \{\perp\}$ calcolabile

$\exists h$ PR $\quad f(x, y) = \varphi_{h(x)}(y)$

$f = \varphi_e^2(x, y) = \varphi^1_{s(e,x)}(y) \quad \Rightarrow h(x) = s(e, x)$ è PR

Teorema (del punto fisso)

$\forall h : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \quad \exists e \in \mathbb{N}$ con $\varphi_e(x) = \varphi_{h(e)}(x) \; \forall x$

Sia s del teorema s.m.n con $m = n = 1$

Cerco $e = s(a, a)$ allora

$\varphi_e^1(x) = \varphi^1_{s(a,a)}(x) = \varphi_a^2(a, x)$

$\varphi^1_{h(e)}(x) = \varphi^1_{h(s(a,a))}(x) = U^2(h(s(a,a)), x) = g(a, x)$

Scelgo e in modo che $U^2(h(s(a,a)), x) = \varphi_a^2(a, x)$

$g = \varphi_a^2$ $\square$

Corollario: la funzione di ACKERMANN definita da

$$A(x,y) = \begin{cases} y+1 & \text{se } x=0 \\ A(x-1,1) & \text{se } y=0 \quad x>0 \\ A(x-1, A(x,y-1)) & \text{se } y>0 \quad x>0 \end{cases}$$

è calcolabile

Poniamo $A'(e,x,y) = \begin{cases} y+1 & \text{se } x=0 \\ \varphi^2(e,x-1,1) & \text{se } y=0 \quad x>0 \\ U^2(e,x-1,U^2(e,x,y-1)) & \text{se } x>0,\ y>0 \end{cases}$

Allora A' è calcolabile (definita per casi e U^2 calcolabile) da cui $\exists e$ con $A' = \varphi^3_e$. Allora otteniamo

$A'(e,x,y) = \varphi_e(e,x,y) = \varphi_{S(e,e)}(x,y) = \varphi_{h(e)}(x,y)$

dove $h(e) = S(e,e)$ con S del teorema S.m.n

Poichè $\exists e$ con $\varphi_{h(e)} = \varphi_e$. Considerando tale e si ha $U^2(e,x,y) = A'(e,x,y) \Rightarrow A' = A$ $\square$

Prop: Esiste un programma che stampa il suo codice

la funzione π^2_1 è PR da cui $\exists a$ con $\pi^2_1 = \varphi^2_a$

ora $e = \pi^2_1(e,x) = \varphi^2_a(e,x) = \varphi_{S(e,e)}(x) = \varphi^1_{h(e)}(x)$

Ora $S(e,x)$ è P.R. $\Rightarrow \exists e$ con $\varphi_{h(e)} = \varphi_e$

dunque $e = \varphi^1_e(x)$

$\square$

Teorema (ricorsione sul decorso dei valori)

Sia $h: \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ allora poniamo

$$\begin{cases} f(x) = h(x, \langle f(0), \dots, f(x-1) \rangle) \\ f(0) = h(0,1) \end{cases}$$

Se h è PR anche f lo è

Sia $f^\#: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ $f^\#(x) = \langle f(0), \dots, f(x) \rangle$

$f^\#$ è PR infatti $f^\#(0) = \langle f(0) \rangle = 2^{h(0,1)+1}$

$$f^\#(x+1) = f^\#(x) \,\hat{}\, \langle f(x+1) \rangle = f^\#(x) \,\hat{}\, \langle h(x+1, f^\#(x)) \rangle$$
$$= H(x, f^\#(x))$$

dove $H(x,z) = z \,\hat{}\, \langle h(x+1, \overset{?}{z}) \rangle$

dunque $f^\#$ è PR $\Rightarrow f(x) = \Pi(x, f^\#(x))$ è PR $\square$

Teorema: (i) $\{(e,x,t,y) \mid \varphi_e(x) \downarrow_t = y\}$ è PR

(ii) $\{(e,x,t) \mid \varphi_e(x) \downarrow_t\}$ è PR

Idea: sia d il valore del contatore di sistema al tempo t e a_i il valore dei registri.

Allora se $c = \prod p(i)^{a_i+1}$ $c' = \langle c, d \rangle$

Si ha $c'(e,t)$ è una funzione PR

infatti $c'(e,0) =$ conf iniziale

$c'(e,t+1) = \text{Aggiorna}(e,t,c'(e,t))$

dove aggiorna legge l'istruzione in d e modifica $\langle c, d \rangle$ $\square$

$P \subseteq \mathbb{N}^k$ è DECIDIBILE se χ_P è calcolabile

$P \subseteq \mathbb{N}^k$ è SEMIDECIDIBILE se $\exists R \subseteq \mathbb{N}^{k+1}$ decidibile

$$P = \{ \bar{y} \mid \exists t \ (t, \bar{y}) \in R \}$$

Teorema: $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N} \cup \{\bot\}$ calcolabile $\iff G(f)$ semidecidibile

[$\Rightarrow$] $f = \varphi_e$ ma $\{(x,t,y) \in \mathbb{N}^3 \mid \varphi_e(x)\downarrow_t = y\}$ è PR

dunque è decidibile.

$$G(f) = \{(\bar{x}, y) \mid \exists t \ (\bar{x}, t, y) \in R\}$$

[$\Leftarrow$] $G(f) = \{(\bar{x}, y) \mid \exists t \, R(t, \bar{x}, y)\}$ con R decidibile

$$f(x) = \pi_1^2 (\mu \langle y, t \rangle \ R(t, \bar{x}, y))$$

<u>Lemma</u> Siano g_1, g_2 calcolabili e P decidibile

$$f(x) = \begin{cases} g_1(x) & \text{se } P(x) \\ g_2(x) & \text{se } \neg P(x) \end{cases}$$

è calcolabile

$f(x) = g_1(x)\chi_P(x) + g_2(x)\chi_{\neg P}(x)$ che è calcolabile

<u>Teorema</u>: $K_0 = \{ n \in \mathbb{N} \mid \varphi_n(n)\downarrow \}$ è indecidibile

Se K_0 fosse decidibile allora la funzione

$$D(n) = \begin{cases} \varphi_n(n) + 1 & \text{se } n \in K_0 \\ 0 & \text{se } n \notin K_0 \end{cases}$$

sarebbe calcolabile. Il che è assurdo $\blacksquare$

Corollario $K = \{(x, y) \mid \varphi_x(y)\downarrow\}$ è indecidibile

Teorema: Sia $A \subseteq \mathbb{N}$ $A \neq \emptyset$. I seguenti fatti sono tra loro equivalenti

(i) A è ricorsivamente enumerabile
(cioè $A = \{ f(n) : n \in \mathbb{N} \}$ con f ricorsiva totale)

(ii) A semidecidibile

(iii) $A = dom(\varphi_e)$ $\exists e \in \mathbb{N}$

(iv) A è Σ_1^0-definibile
(cioè $\exists \varphi \in \Sigma_1^0$ $x \in A \iff \mathbb{N} \models \varphi(x)$)

(i) $\Rightarrow$ (ii) $A = \{ y \mid \exists x \ f(x) = y \}$ ora $\{(x,y) : f(x) = y\}$ è decidibile

(ii) $\Rightarrow$ (iii) $A = \{ y \mid \exists x \ R(x,y) \}$ con R decidibile
$f(x) = \mu y \ R(x,y)$. Allora
$f(x) \downarrow \iff \exists y \ R(x,y) \iff x \in A$

(iii) $\Rightarrow$ (iv)
(iii) $\Rightarrow$ (ii)
$A = \{ x \mid \varphi_e(x) \downarrow \} = \{ x \mid \exists t \ \varphi_e(x) \downarrow_t \}$
se $R(x,t) = (\varphi_e(x) \downarrow_t)$.
Abbiamo $R(x,t)$ Σ_1^0-definibile

(ii) $\Rightarrow$ (i) $A = \{ x \mid \exists y \ R(x,y) \}$ con R decidibile
Poiché $A \neq \emptyset$ $A \ni a_0$

$$f(x,y) = \begin{cases} y & R(x,y) \\ a_0 & \neg R(x,y) \end{cases} \qquad f : \mathbb{N}^2 \to A \text{ surgettiva}$$

$g(n) = f(\pi_1(n), \pi_2(n))$ (ho fissato codifica coppie con π PR)

Teorema (Post) $A, \mathbb{N} \setminus A$ semidecidibili $\Rightarrow A$ decidibile

(i) A semidecidibile $\Rightarrow A = \{x \mid \exists y \, R(x,y)\}$

$\mathbb{N} \setminus A$ " $\Rightarrow \mathbb{N} \setminus A = \{x \mid \exists y \, Q(x,y)\}$

con R, Q decidibili

Sia $f(x) = \mu y \, [R(x,y) \vee Q(x,y)]$. Ora f è totale

e vale $A = \{x \mid R(x, f(x))\} \Rightarrow A$ decidibile

(ii) $A = \{f(n) \mid n \in \mathbb{N}\}$

$\mathbb{N} \setminus A = \{g(n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ infatti semidecidibile $\Updownarrow$ ric. enumerabile

dove $f = \varphi_e$, $g = \varphi_b$ totali

Sia $h(x) = \mu n \, (x = f(n) \vee x = g(n))$ è totale

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } f(h(x)) = x \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad \square$$

Sia $L = \{0, S, +, \cdot\}$ e $\# : \{0, S, +, \cdot, \neg, \forall, \exists, \rightarrow, \vee, \wedge\} \rightarrow \mathbb{N}$ una funzione iniettiva

Andiamo a "codificare" gli L-termini

$\ulcorner\ \urcorner : L\text{-termini} \rightarrow \mathbb{N}$ ponendo

$\ulcorner 0 \urcorner = \langle \#(0) \rangle$

$\ulcorner S(t) \urcorner = \langle \#(S), \ulcorner t \urcorner \rangle$

$\ulcorner v_i \urcorner = \langle \#(v), i \rangle$

$\ulcorner t_1 + t_2 \urcorner = \langle \#(+), \ulcorner t_1 \urcorner, \ulcorner t_2 \urcorner \rangle$

$\ulcorner t_1 \cdot t_2 \urcorner = \langle \#(\cdot), \ulcorner t_1 \urcorner, \ulcorner t_2 \urcorner \rangle$

Lemma $\{ n \mid n \text{ codifica un termine} \}$ è PR

Vogliamo definire $T(n) = 1$ se n codifica un termine

uso la ricorsione sul decorso dei valori:

$$T(n) = h(n, \langle T(0), \dots, T(n-1) \rangle)$$

Poniamo

$h(n,s) = 1$ se $n = \ulcorner 0 \urcorner \vee (\exists i < n \;\; n = \langle \#(S), u \rangle \wedge$

$\wedge\, \pi(u,s) = 1) \vee \exists i < n \;\; n = \langle \#(v), i \rangle \vee$

$\vee (\exists u, v < n \;\; (n = \langle \#(+), u, v \rangle \wedge$

$\wedge\, \pi(u,s) = \pi(v,s) = 1) \vee$

$\vee \exists u, v < n \;\; (n = \langle \#(\cdot), u, v \rangle \wedge \pi(u,s) = \pi(v,s) = 1)$

$h(n,s)$ è PR $\Rightarrow T(n)$ è PR

Definiamo $\ulcorner\ \urcorner : L\text{-formule} \to \mathbb{N}$

$$\ulcorner t_1 \doteq t_2 \urcorner = \langle \#(\doteq), \ulcorner t_1 \urcorner, \ulcorner t_2 \urcorner \rangle$$

$$\ulcorner \neg \alpha \urcorner = \langle \#(\neg), \ulcorner \alpha \urcorner \rangle$$

$$\ulcorner \alpha \vee \beta \urcorner = \langle \#(\vee), \ulcorner \alpha \urcorner, \ulcorner \beta \urcorner \rangle$$

...

$$\ulcorner \exists v_i\, \phi \urcorner = \langle \#(\exists), \ulcorner v_i \urcorner, \ulcorner \phi \urcorner \rangle$$

Lemma: $\{n \mid n$ codifica una formula$\}$ è PR

Analogo a quanto fatto per i termini

Introduciamo anche la codifica delle dimostrazioni nel sistema DN.

Ricordiamo che una dimostrazione è una succ. di coppie $d = \langle (T_1, \phi_1), \dots, (T_n, \phi_n) \rangle$

Se $T = \{\alpha_1, \dots, \alpha_m\} \Rightarrow \ulcorner T \urcorner = 2^{\ulcorner \alpha_1 \urcorner} + \dots + 2^{\ulcorner \alpha_m \urcorner}$

da cui $\ulcorner (T, \phi) \urcorner = 2^{\ulcorner T \urcorner} 3^{\ulcorner \phi \urcorner}$

Possiamo dunque porre $\ulcorner d \urcorner = \prod_{i<n} p(i)^{\ulcorner (T_i, \phi_i) \urcorner}$

Lemma: $\{d \mid d$ codifica una L dimostrazione$\}$ è PR

Teorema: Esiste una funzione PR $sub: N^3 \to N$ tale che $sub(\ulcorner\varphi\urcorner, i, \ulcorner t\urcorner) = \ulcorner\varphi[t/v_i]\urcorner$

Si usa la ricorsione sul decorso dei valori ponendo
$sub(n,i,j) = h(n,i,\langle sub(0,1,y),\dots, sub(n-1,i,y)\rangle)$
dove h è definita per casi (varie clausole)

Teorema: Esiste una funzione PR $num: N \to N$
dove $num(n) = \ulcorner S^n 0\urcorner$

$num(0) = \ulcorner 0\urcorner$
$num(n+1) = \langle \#(S), num(n)\rangle$

Corollario: Esiste una funzione $SUB^*: N^2 \to N$
tale che $SUB^*(\ulcorner\varphi\urcorner, n) = \ulcorner\varphi[\overline{n}/v_0]\urcorner$
$SUB^*(f,n) = sub(f, 0, num(n))$

Lemma (di diagonalizzazione) Sia $\alpha(v_0)$ una L-formula con $VL(\alpha) \subseteq \{x_0\}$. Allora $\exists\beta$ L-formula chiusa con

$$Q \vdash \beta \leftrightarrow \alpha(\overline{\ulcorner\beta\urcorner})$$

Sia $D(n) = SUB^*(n,n)$. $D(n)$ ricorsiva totale
dunque è binumerata funzionalmente in Q da ϕ
ovvero: $\forall\gamma\ Q \vdash [\phi(\overline{\ulcorner\gamma\urcorner}, y) \leftrightarrow y = \overline{\ulcorner\gamma(\overline{\ulcorner\gamma\urcorner})\urcorner}]$

Ponendo $\gamma = \exists y\,[\phi(v_0,y) \wedge \alpha(y)]$ e $\beta = \gamma(\overline{\ulcorner\gamma\urcorner})$

$Q \vdash \beta \leftrightarrow \gamma(\overline{\ulcorner\gamma\urcorner})$
$Q \vdash \beta \leftrightarrow (\exists y[\phi(\overline{\ulcorner\gamma\urcorner}, y) \wedge \alpha(y)]$ $\quad Q \vdash \beta \leftrightarrow \alpha(\overline{\ulcorner\gamma(\overline{\ulcorner\gamma\urcorner})\urcorner})$

Teorema (Tarski sull'indefinibilità della verità)

$True = \{ \ulcorner \varphi \urcorner \mid \mathbb{N} \models \varphi \}$ non è definibile in $\mathbb{N}$

Se per assurdo fosse definibile, ovvero $\exists \alpha(v_0)$

$True = \{ n \mid \mathbb{N} \models \alpha(n) \}$

Applicando il lemma di diagonalizzazione a $\neg\alpha$

$\exists \beta$ chiusa $\quad Q \vdash \beta \leftrightarrow \neg\alpha(\overline{\ulcorner \beta \urcorner})$

Avrei dunque:

$\mathbb{N} \models \neg\alpha(\ulcorner \beta \urcorner) \iff \mathbb{N} \models \beta \iff \beta \in True \iff \mathbb{N} \models \alpha(\ulcorner \beta \urcorner)$

il che è assurdo $\square$

Anche dopo

Sia T una L-teoria. T è DECIDIBILE se

$\{ \ulcorner \varphi \urcorner \mid T \vdash \varphi \}$ è DECIDIBILE

Corollario: $Th(\mathbb{N}, 0, S, +, \cdot)$ è INDECIDIBILE

$\{ \ulcorner \varphi \urcorner \mid Th(\mathbb{N}) \vdash \varphi \} = \{ \ulcorner \varphi \urcorner \mid \mathbb{N} \models \varphi \} = True$

Ma True è indecidibile.

Teorema (Primo di Gödel) PA è INCOMPLETA

Poiché le codifiche degli assiomi di PA sono un insieme PR. Posto $\{(d, \ulcorner\varphi\urcorner) \in \mathbb{N}^2 \mid T \vdash_d \varphi\} = Prov$ si ha che Prov è PR dunque è binumerato in Q da $P(x,y)$.

Sia $Teo(x) = \exists d\ P(d, x)$. Per diagonalizzazione

$$\exists G \qquad Q \vdash G \leftrightarrow \neg Teo(\ulcorner G \urcorner)$$

- $PA \nvdash G$. Se $PA \vdash G$. Allora $\exists d\ (d, \ulcorner G\urcorner) \in Prov$ da cui
$$Q \vdash P(\overline{n}, \ulcorner G \urcorner)$$
$$Q \vdash \exists d\ P(d, \ulcorner G \urcorner)$$
$$Q \vdash Teo(\ulcorner G \urcorner)$$
$$Q \vdash \neg G$$

Ora $Q \subseteq PA \Rightarrow PA \vdash \neg G$ Assurdo PA coerente

- $PA \nvdash \neg G$ Se $PA \vdash \neg G$ allora $PA \vdash Teo(\ulcorner G \urcorner)$ da cui $\mathbb{N} \models Teo(\ulcorner G \urcorner)$
$$\mathbb{N} \models \exists d\ P(d, \ulcorner G \urcorner)$$
$$\exists d \in \mathbb{N} \quad \mathbb{N} \models P(d, \ulcorner G \urcorner)$$
allora $(d, \ulcorner G \urcorner) \in Prov \Rightarrow PA \vdash_d G$ Assurdo

Oss: $\mathbb{N} \models G$

$$PA \nvdash G \Rightarrow \forall d \quad PA \nvdash_d G$$
$$\forall d \quad (d, \ulcorner G \urcorner) \notin Prov$$
$$\forall d \quad \mathbb{N} \models \neg P(d, \ulcorner G \urcorner)$$
$$\mathbb{N} \models \forall x\ \neg P(x, \ulcorner G \urcorner)$$
$$\mathbb{N} \models \neg Teo(\ulcorner G \urcorner) \qquad \mathbb{N} \models G$$

T si dice ω-COERENTE se non esiste $\varphi(x)$

- $\forall n \quad T \vdash \neg \varphi(n)$
- $T \vdash \exists x \; \varphi(x)$

Oss $\quad \mathbb{N} \models T \Rightarrow T \; \omega\text{-coerente} \Rightarrow T$ coerente

Teorema (Primo Gödel forte) Sia T una L-teoria T ω-coerente, ricorsivamente assiomatizzabile e che contiene Q. Allora è incompleta

Sia G come nel teorema "standard"

- $T \nvdash G$ (come sopra)
- $T \nvdash \neg G$. Se $T \vdash \neg G$ allora $T \vdash \mathrm{Teo}(\ulcorner G \urcorner)$

allora $\quad T \vdash \exists x \; \mathrm{Proof}(x, \ulcorner G \urcorner) \quad (a)$

Ma poichè $T \nvdash G \quad \forall d \quad T \nvdash_d G$ da cui

$$Q \vdash \neg P(\bar{d}, \ulcorner G \urcorner)$$

e poichè $T \supset Q$ si ha

$$\forall d \quad T \vdash \neg P(\bar{d}, \ulcorner G \urcorner) \quad (b)$$

$(a) + (b) \rightarrow T$ non è ω-coerente $\quad \square$

Teorema (di Rosser)

$Q \subseteq T$, T coerente, T ricorsivamente assiomatizzabile.
T è incompleta

Uso $\; Q \vdash R \leftrightarrow \forall x \; (\square_x R \rightarrow \exists y < x \; \square_y \neg R)$

dove $\; \square_x \varphi = P(x, \ulcorner \varphi \urcorner)$

Teorema (Secondo di Gödel) $PA \nvdash Con(PA)$

dove $Con(PA) = \neg Teo(\ulcorner \bot \urcorner)$

Mostriamo che $PA \vdash Con(PA) \leftrightarrow G$ e poiché $PA \nvdash G$ otteniamo la tesi

$PA \vdash G \to Con\ PA$

$PA \vdash G \to \neg Teo(\ulcorner G \urcorner)$

ora $PA \vdash \neg Teo(\ulcorner G \urcorner) \to Con(PA)$

infatti $PA \vdash Teo(\ulcorner \bot \urcorner) \to Teo(\ulcorner G \urcorner)$

poiché $PA \vdash \bot \Rightarrow PA \vdash G$ $\neg G$

$PA \vdash \neg G \to \neg Con\ PA$

$PA \vdash \neg G \to Teo(\ulcorner \bot \urcorner)$

$PA \vdash \neg G \Rightarrow PA \vdash Teo(\ulcorner G \urcorner)$

ora $PA, Teo(\ulcorner G \urcorner) \vdash G$

$PA, G \vdash \bot$

Teorema: T L-teoria ricorsivamente assiomatizzabile e completa. Allora è decidibile

$\{\ulcorner \varphi \urcorner \mid \varphi \in \text{Assiomi } T\}$ è decidibile dunque
$\{\ulcorner \varphi \urcorner \mid T \vdash \varphi\}$ è semidecidibile ($\exists d \; T \vdash_d \varphi$)

Ora T completo $\{\ulcorner \varphi \urcorner \mid T \nvdash \varphi\} = \{\ulcorner \varphi \urcorner \mid T \vdash \neg\varphi\}$
dunque è semidecidibile

Ora $\mathbb{N} = \{\ulcorner \varphi \urcorner \mid T \vdash \varphi\} \cup \{\ulcorner \varphi \urcorner \mid T \nvdash \varphi\} \cup \{n \mid n \text{ non codifica formula}\}$
allora per Post sono tutti decidibili

T si dice ESSENZIALMENTE INDECIDIBILE
se $\forall T' \supset T$ coerente $L_{T'} = L_T$ si ha
T' indecidibile

Teorema: Q è essenzialmente indecidibile
Sia $T \supset Q$ e per assurdo $Teo = \{\ulcorner \varphi \urcorner \mid T \vdash \varphi \text{ decidibile}\}$
Allora esiste $\theta(x)$ che binumera Teo.
Dal lemma di diagonalizzazione $\exists \beta$ chiusa
$$Q \vdash \beta \leftrightarrow \neg\theta(\overline{\ulcorner \beta \urcorner})$$
- $T \vdash \beta \Rightarrow \ulcorner \beta \urcorner \in Teo \Rightarrow Q \vdash \theta(\overline{\ulcorner \beta \urcorner}) \Rightarrow Q \vdash \neg\beta$
 ora $T \supset Q$ dunque $T \vdash \neg\beta \Rightarrow T$ incoerente
- $T \vdash \neg\beta \quad \ulcorner \beta \urcorner \notin Teo \Rightarrow Q \vdash \neg\theta(\overline{\ulcorner \beta \urcorner}) \Rightarrow Q \vdash \beta$
 Allora $T \supset Q \Rightarrow T \vdash \beta \Rightarrow T$ incoerente

T è incompleta
Corollario $T \supset Q$ ric assiomatizzabile e coerente $\Rightarrow$ incompleto

Siano $A, B \subseteq \mathbb{N}$ diremo $A \leq_m B$ se
$\exists f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ calcolabile totale
$n \in A \iff f(n) \in B$

Prop: $A \leq_m B$ B decidibile $\Rightarrow$ A decidibile

Si usa $\chi_A(n) = (\chi_B \circ f)(n)$

Prop $K_0 = \{ n : \varphi_n(n)\downarrow \} \leq_m \{ \ulcorner \varphi \urcorner \mid Q \vdash \varphi \}$

$n \in K_0 \iff \varphi_n(n)\downarrow \iff \exists t \ \ \varphi_n(n)\downarrow_t$

Ora $A = \{ (e, x, t) : \varphi_e(x)\downarrow_t \}$ è decidibile quindi è binumerato in Q da $\phi(x, y, t)$. Dunque

$n \in K_0 \iff \exists t \in \mathbb{N} \ \ Q \vdash \phi(\bar{n}, \bar{n}, \bar{t}) \iff Q \vdash \exists t \phi(\bar{n}, \bar{n}, t)$

infatti $[\Rightarrow]$ ovvia mentre per $[\Leftarrow]$ poiché

$Q \vdash \exists t \phi(\bar{n}, \bar{n}, t) \Rightarrow \mathbb{N} \models \exists t \ \phi(n, n, t) \Rightarrow$

$\exists t \in \mathbb{N} \ \ \mathbb{N} \models \phi(n, n, t)$

Se $(n, n, t) \notin A$ allora per binumerabilità

$Q \vdash \neg\phi(n, n, t) \Rightarrow \mathbb{N} \models \neg\phi(n, n, t)$ $\lightning$

Da cui la tesi

Dunque $n \in K_0 \iff \ulcorner \exists t \ \phi(\bar{n}, \bar{n}, t) \urcorner \in \{ \ulcorner \varphi \urcorner \mid Q \vdash \varphi \}$

$\square$

Siano T, S teorie nei linguaggi L_T e L_S

Un INTERPETRAZIONE di T in S è una

funzione : L_T-formule $\longrightarrow$ L_S-formule

$$\varphi \longrightarrow \varphi^*$$

$$\varphi(x, y, z) \longmapsto \varphi^*(x_1 \ldots x_n, y_1 \ldots y_n, \ldots)$$

tale che :

- φ Assioma di $T \Rightarrow S \vdash \varphi^*$
- $(\neg\varphi)^* = \neg(\varphi)^*$
- $(\alpha \wedge \beta)^* = \alpha^* \wedge \beta^*$
- $(\forall x \varphi)^* = \forall x_1 \ldots x_n \; [\Delta(x_1 \ldots x_n) \rightarrow \varphi^*]$
- $(\exists x \varphi)^* = \exists x_1 \ldots x_n \; [\Delta(x_1 \ldots x_n) \wedge \varphi^*]$

dove Δ è una fissata L_S-formula

Mentre per le formule atomiche

- $(x = y)^* = E(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n)$

  dove E è una L_S-formula e $S \vdash E$ rel. equivalenza
- $R \in L_T$ relazione k-aria

  $(R(x, y, \ldots))^* = \varphi_R(x_1, \ldots, x_n, y_1 \ldots y_n, \ldots)$

  dove φ_R è una L_S-formula
- $f \in L_T$ simbolo di funzione

  $(f(x, y, \ldots) = z)^* = \varphi_f(x_1 \ldots x_n, y_1 \ldots y_n, \ldots, z_1 \ldots z_n)$

Dato un interpretazione di T in S. Se $M \models S$ posso definire $M^* \models T$ in questo modo

- $dom(M^*) = \{ [(a_1,..,a_n)]_E \mid M \models \Delta(a_1,..,a_n) \}$
- Se $f \in L_T$ - formula (ovvia
  $f^{M^*}([(a_1.., a_n)]) = [b_1 ... b_n]$ dove si ha
  $b_1 ... b_m$ tali che $M \models \varphi_f(a_1 ... a_n, b_1 .. b_m)$
- In modo analogo con simboli costanti (funzioni con arietà 0) e i predicati)

Teorema : Sia $\varphi \to \varphi^*$ un'interpretazione di T in S
Sia $M \models S$ e $M^* \models T$. Allora per ogni L_T - formula $\varphi(x, y ...)$ vale

$$M^* \models \varphi([(a_1.., a_n)], [(b_1,..b_m)], ...)$$
$$\Updownarrow$$
$$M \models \varphi^*(a_1 .. a_n, b_1 .. b_m, ...)$$

Per le formule atomiche è la definizione.

- $\varphi = \forall x \ \theta(x, u)$
  $M^* \models \forall x \ \theta(x, [(b_1 .. b_m)]) \Leftrightarrow \forall \alpha \in M^* \ M \models \theta(\alpha, [(b_1 .. b_n)])$
  dove $\alpha = [(a_1 ... a_n)]$
  Per ipotesi induttiva $\forall a_1 .. a_n \in \Delta^M \ M \models \theta(a_1 .. a_n, b_1 .. b_n)$
  $M \models \forall x_1 ... x_n \ (\Delta \vec{x} \to \theta(\vec{x}, \vec{b}))$
  $M \models [\forall x \ \theta]^* (b_1 .. b_n / y_1 .. y_n)$ □

Teorema : Sia $\varphi \to \varphi^*$ un interpretazione di T in S
Per ogni L_T - formula $T \vdash \varphi \Rightarrow S \vdash \varphi^*$
Sia $T \vdash \varphi$. Poichè $M \models S \Rightarrow M \models T^*$
$M^* \models T \ (T \vdash \varphi) \ M^* \models \varphi$ □

Prop: $Th(\mathbb{N}, 0, S, +, \cdot) \leq_I Th(\mathbb{Z}, 0, 1, +, \cdot)$

Vale il fatto $n \in \mathbb{Z}$. $n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow$ somma 4 quadrati

Dunque $\Delta(x) = \exists a_1, .., a_n \; x = \sum a_i^2$ allora

- $(Sx = y)^* = (x + 1 = y)$
- $(\forall x \, \varphi)^* = \forall x \, (\Delta(x) \rightarrow \varphi^*)$
- $(\exists x \, \varphi)^* = \exists x \, (\Delta(x) \wedge \varphi^*)$

Prop: $Th(\mathbb{Z}, +, \cdot) \leq_I Th(\mathbb{N}, 0, S, +, \cdot)$

Penso $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \times \mathbb{N} / E$ dove $(a,b) \, E \, (c,d) \Leftrightarrow a + d = b + c$

- $(x = y)^* = (x_1 + y_2 = x_2 + y_1)$
- $(x + y = z)^* = (x_1 + y_1 + z_2 = x_2 + y_2 + z_1)$
- $(x \cdot y)^* = (x_1 y_1 + x_2 y_2 + z_2 = x_1 y_2 + x_2 y_1 + z_1)$
- $(\exists x \, \Theta)^* = \exists x_1, x_2 \; \Theta^*$

Corollario: $Th(\mathbb{Z}, 0, 1, +, \cdot)$ è indecidibile

Prop: $Th(V_\omega, \in) \leq_I Th(\mathbb{N}, 0, S, +, \cdot)$

Consideriamo la traduzione $c : V_\omega \rightarrow \mathbb{N}$

data da $c(\{a_1, .., a_n\}) = 2^{c(a_1)} + .. + 2^{c(a_n)}$

$x \in^* y$ se $y = 2^{x_1} + .. + 2^{x_m}$ e x è uno degli x_i

$\in^*$ è PR $\Rightarrow$ binumerabile da $\varphi_\in$ in Q

- $(x = y)^* = (x = y)$
- $(x \in y)^* = \varphi_\in(x, y)$
- $(\forall x \, \varphi)^* = \forall x \; \varphi^*$

Corollario: $ZF \setminus$ infinito $\leq_I PA$

Un interpretazione si dice FEDELE se
$$T \vdash \varphi \Leftarrow\Rightarrow S \vdash \varphi^*$$
($\Rightarrow$) sempre

Teorema: Se $T \leq_I S$ Allora esiste $T' \supset T$ nello stesso linguaggio con $T' \leq_I S$ fedele

Pongo $T' = \{ \varphi \in L_T\text{-formule} \mid S \vdash \varphi^* \}$

Teorema: ZF è INDECIDIBILE
Poiché $Q \leq_I PA$ e $PA \leq_I ZF$
(si usa $\Delta(x) =$ "x ordinale finito")
allora $Q \leq_I ZF$ non fedelmente
Per il lemma $\exists T \supset Q$ con $T \leq_I ZF$ fedele
Dall'essenziale indecidibilità di Q si ha la tesi

Lemma Se un estensione finita di T è indecidibile, anche T lo è
Considero $T \cup \{\varphi\} \leq_m T$ infatti considero la funzione $f(\theta) = (\varphi \to \theta)$

Teorema (Church) la teoria senza assiomi $T^\emptyset$ nel linguaggio $L = \{E\}$ (E rel binaria) è indecidibile
S.P.G. $E = \in$. Allora $T^\emptyset \subset ZF$ stesso linguaggio
$Q \leq_I ZF \Rightarrow ZF \vdash \wedge Q^*$.
Per compattezza $\exists S \subset ZF$ finito $S \vdash \wedge Q^*$
Ora $Q \leq_I S$ è indecidibile.
Ma S è estensione finita di $T^\emptyset$

DLO ≡ Teoria degli ordini densi senza estremi

- $x \le y \wedge y \le z \to x \le z$
- $x \le x$
- $x \le y \wedge y \le x \to x = y$
- $x \le y \vee y \le x$
- $x \lneq y \to \exists z \quad x \lneq z \wedge z \lneq y$
- $\forall x \; \exists y \quad x \lneq y$
- $\forall x \; \exists y \quad y \lneq x$

Teorema (Cantor) $A, B \models DLO$. $|A| = |B| = \aleph_0 \Rightarrow A \cong B$

Se $(a_0, \dots a_n) \subset A$ e $(b_0, \dots b_n) \subset B$, scrivo

$(a_0, \dots a_n) \cong (b_0 \dots b_n)$ se $\cdot\; a_i < a_j \to b_i < b_j$

$\cdot\; a_i = a_j \to b_i = b_j$

Posto $A = \{a_m \mid m \in \mathbb{N}\}$ e $B = \{b_m \mid m \in \mathbb{N}\}$

costruisco induttivamente $(a_{i_0}, \dots, a_{i_m}) \cong (b_{i_0}, \dots b_{i_m})$

Corollario: DLO è completo

T è completo $\Leftrightarrow$ elementarmente equivalente

Siano $A, B \models DLO$. Se $|A| = |B| = \aleph_0$ ho finito

Altrimenti poiché $Th(A) \supset DLO$ è coerente

per LS ↓ ha un modello numerabile A'

Analogamente $\exists B'$ $|B'| = \aleph_0$ e $B' \models Th(B)$

Allora $A' \equiv A$, $B' \equiv B$ Ma $A' \cong B'$ □

Corollario: DLO è decidibile

T completo + ricorsivamente assiomatizzato $\Rightarrow$ decidibile

Compendio

COMPENDIO

Teorema (König) Ogni albero con ramificazioni finite e infiniti livelli ha un ramo infinito

Dim e_0 = radice albero

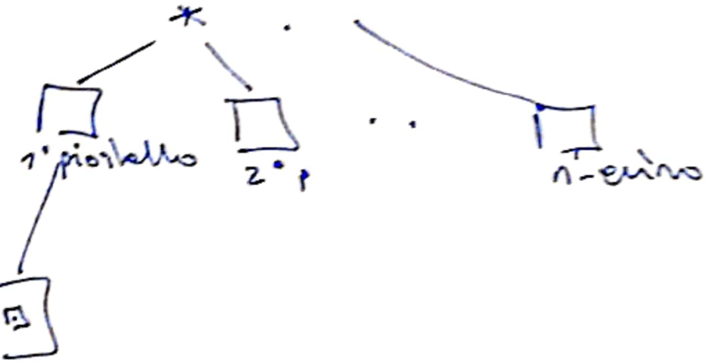
e_{n+1} = uno dei figli di e_n con infiniti figli

Problema : Tassellazione del piano

finito tipi di piastrella

Se tassello un quadrato ⇒ Tassello il piano

Dim Definisco un albero di tassellazioni parziali



Al livello $n+1$ ci metto tassellazioni $(2n-1)\times(2n-1)$ con al centro il padre

⇒ Poichè posso tassellare un quadrato ha infiniti livelli E uso König

OSS Con infiniti tipi non è vero

ricopro un quadrato ma non tutto

TAUTOLOGIE COMPLICATE

Si usa : non esiste funzioni iniettive $f: n+1 \to n$

usando le lettere A_{ij} $\begin{matrix} i=1,2,3 \\ j=1,2,3 \end{matrix}$ con "A_{ij}" = "$f(i)=j$"

sia φ la formula i cui modelli corrispondono a

$f = 3 \to 2$ iniettiva $\Rightarrow \neg\varphi$ è TAUTOLOGIA

COMPENDIO (TABLEAUX)

$$T \cup \{\varphi \vee \psi\} \quad \swarrow\ \searrow \quad T, \varphi \qquad T, \psi$$

$$T \cup \{\varphi \wedge \psi\} \ \downarrow \ T, \varphi, \psi$$

$$T \cup \{\exists x\, \varphi(x)\} \ \downarrow \ T, \varphi[c/x] \quad (c \text{ nuova costante})$$

$$T \cup \{\forall x\, \varphi(x)\} \ \downarrow \ T, \varphi[t/x], \forall x\, \varphi(x)$$

$PA^1 = Q +$ schema d'induzione

Per ogni L-formula φ e ogni variabile x ho l'assioma

$$Ind_{\varphi, x} : \left[\varphi[0/x] \wedge \forall z \left(\varphi[z/x] \to \varphi[s(z)/x]\right)\right] \to \forall z\, \varphi[z/x]$$

$$PA^2 = Q + \forall P\, [P(0) \wedge \forall z\, (P(z) \to P(sz))] \to \forall z\, P(z)]$$

$\varphi \equiv (0 + x \doteq x)$

$Q \vdash 0 + 0 = 0$

$Q \vdash \varphi[0/x]$

$Q \vdash \forall z\, [0 + z = z \to s(0+z) = s(z)]$

$Q \vdash \forall z\, [0 + z = z = 0 + s(z) = s(z)]$

$Q \vdash \forall z\, [\varphi[z/x] \to \varphi[z+1/x]]$

$PA^1 \vdash \varphi[0/x] \wedge \forall z\, [\varphi[z/x] \to \varphi[z+1/x]] \to \forall z\, \varphi[z/x]$

usando MP. $\quad PA^1 \vdash \forall z\, (0 + z \doteq z)$

Q non lo dimostra!

OMOMORFISMI (di strutture)

Siano A, B L-strutture e $F: \mathrm{dom}\, A \to \mathrm{dom}(B)$

F si dice OMOMORFISMO se

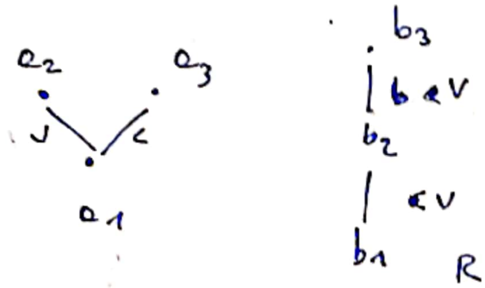
(1) $\forall c \in L$ costante $F(c^A) = c^B$

(2) $\forall a_1, \dots, a_n \in A$ $\quad Fa_i = b_i$
$\forall a \in A$ $\quad Fa = b$
allora $f^A(a_1, \dots, a_n) = a$
$\Downarrow$
$f^B(b_1, \dots, b_n) = b$

(3) $\forall a_1, \dots, a_n \in A$ $\quad Fa_i = b_i$
$R^A(a_1, \dots, a_n) = 1 \to R^B(b_1, \dots, b_n) =$

F si dice ISOMORFISMO se F è una INVERTIBILE e:
(3) vale con $\Leftrightarrow$

Esempio ①



$F(a_i) = b_i$
è un omo biunivoco
ma non isomorfismo

$R = x<y \wedge y<z$ ~~R è ordine totale~~
$R^A(a_1, a_2, a_3) = 0$
$R^B(b_1, b_2, b_2) = 1$

② $L = \{h\}$ $\quad h$: simbolo rel binario

$A = (\mathbb{R}, +)$ $\quad h^A = +$

$B = (\mathbb{R}^{>0}, \cdot)$ $\quad h^B = \cdot$

$\exp: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{>0}$ è isomorfismo

Def A e B sono ELEMENTARMENTE EQUIVALENTI se
$\forall \varphi$ L-formula chiusa $\quad A \models \varphi \Leftrightarrow B \models \varphi$

Prop: T L-teoria coerente

T completa $\iff \forall A, B \in Mod(T) \quad A \equiv B$

[$\Rightarrow$] Sia φ una L-formula. Poiché T completa:

(i) $T \vdash \varphi \Rightarrow A \models \varphi$ e $B \models \varphi$

(ii) $T \vdash \neg\varphi \Rightarrow A \models \neg\varphi$ e $B \models \neg\varphi$

Altri casi non si presentano.

[$\Leftarrow$] Se per assurdo esistesse φ L-form con $T \nvdash \varphi$
$T \nvdash \neg\varphi$

allora esisterebbero modelli A, B di T con $A \not\models \varphi$
$B \models \neg\varphi$ ↯

Def T si dice <u>CATEGORICA</u> se tutti i modelli siano tra loro isomorfi

Teorema A, B isomorfi $\Rightarrow A, B$ elementarmente equivalenti

Per semplicità $L = \{R\}$ con R = simbolo relazione binaria

$A \models \varphi(a_1, \dots, a_n) \iff B \models \varphi(ha_1, \dots, ha_n) \quad h: A \to B$ iso

per induzione su φ

- Rel $A \models R(a_1, a_2) \iff B \models R(ha_1, ha_2)$ per def iso
- $A \models a_1 \doteq a_2 \iff B \models ha_1 \doteq ha_2$ infatti

per Tarski si ha $\overset{\text{che vale se}}{a_1 = a_2} \iff ha_1 = ha_2$

- $\varphi = \alpha \vee \beta$

$A \models (\alpha \vee \beta)(a_1, \dots, a_n) \overset{\text{Tarski}}{\iff} A \models \alpha(a_1, \dots, a_n)$ o $A \models \beta(a_1, \dots, a_n)$

$\Updownarrow$ ind $\qquad \Updownarrow$ ind

$B \models \alpha(ha_1, \dots ha_n)$ o $B \models \beta(ha_1 \dots ha_n)$

$\Updownarrow$ Tarski su h

$B \models (\alpha \vee \beta)(ha_1, \dots, ha_n)$

$\varphi = \forall x \, \alpha$ $\quad VL(\varphi) \subseteq \{x, x_1, \dots, x_m\}$

$A \models \forall x \, \alpha \, [a_1, \dots, a_n] \iff \forall a \in A \quad A \models \alpha\left(\frac{a}{x}, \frac{a_1}{x_1}, \dots, \frac{a_n}{x_m}\right)$

Tarksy

$\Updownarrow$

$\forall a \in A \quad B \models \alpha\left(\frac{ha}{x}, \frac{ha_1}{x_1}, \dots, \frac{ha_m}{x_m}\right)$

$\Updownarrow$ h surgettiva

$\forall b \in B \quad B \models \alpha\left(\frac{b}{x}, \frac{ha_1}{x_1}, \dots, \frac{ha_n}{x_m}\right)$

$\Updownarrow$ Tarksy

$B \models \forall x \, \alpha(x, ha_1, \dots, ha_n)$

ORA PRESERVANO FORMULE POSITIVE $\wedge \vee \exists$ $\quad$ H-E=

INDUZIONE $\quad L = \{R\}$

$A \models \alpha \vee \beta \, (a_1, \dots, a_n) \Rightarrow B \models \alpha \vee \beta \, (ha_1, \dots, ha_n)$ come agi- come in

$\wedge$

$A \models \exists x \, \alpha(x, a_1, \dots, a_n) \Rightarrow \exists a \in A \, A \models \alpha(a, a_1, \dots, a_n)$

$\Downarrow$ ind

$\exists a \in A \quad B \models \alpha(ha, ha_1, \dots, ha_n)$

$\shortparallel$

$\exists b \in B \quad B \models \alpha(b, ha_1, \dots, ha_n)$

$\Downarrow$

$B \models \exists x \, \alpha(x, ha_1, \dots, ha_n)$

Un modello di PA^2 è una L-struttura M che verifica gli assiomi di Θ e $\forall S \subset M$ se $0^M \in S \wedge \forall a \in S\ s^M(a) \in S \Rightarrow S = M$

<u>Teorema</u> $A, B \vdash PA^2$ allora $\exists F : A \to B$ isomorfismo

<u>Dim</u> $Z = \{ R \subseteq A \times B \mid \bar{0}_A R \bar{0}_B ,\ \forall a \forall b\ aRb \to (s^A a) R (s^B b) \}$,

$Z \neq 0$ infatti $A \times B \in Z$. Sia $F = \bigcap Z$.

F è l'isomorfismo cercato:

- È una funzione infatti se $S = \{ a \in A \mid \exists b \in B\ aFb \}$
  si ha $S = A$ $\left[0_A \in S,\ a \in S \Rightarrow \exists b \in B\ aRb\ \forall R \in Z \right.$
  $\Downarrow$
  $\exists b \in B\ (s^A a) R (s^B b)\ \forall R \in Z$
  $\Downarrow$
  $\left. s^A a \in S \right]$

- È iniettiva $S' = \{ a \in A \mid \forall b, b' \in B\ aFb \wedge aFb' \to b = b' \}$

• $0_A \in S'$. Infatti $0_A F b \longrightarrow b = 0_B$

se $0_A F b$ con $b \neq 0$ allora avrei che $F' = F \setminus \{(0,b)\} \in Z$

infatti • $\bar{0}_A F' \bar{0}_B$

• $x F' y \underset{(x,y) \neq (0,b)}{\longrightarrow} x F y \longrightarrow (sx) F (sy) \underset{sx \neq 0}{\longrightarrow} (sx) F' (sy)$

Dunque ~~avrei che~~ da $F = \bigcap Z$ avrei non volo $0 F b$

• $a \in S'$ ~~...~~ $aFb \wedge aFb' \to b = b'$ In modo analogo

$(sa) F (sb) \wedge (sa) F (sb') \overset{?}{\longrightarrow} sb = sb'$ $\quad a \in S' \Rightarrow sa \in S'$

se ~~...~~ $(sa) F y$ con ~~...~~ $y \neq sb$.

• Analogamente si prova che è surgettiva

• Chiaramente $0_A F 0_B$. Per Ex rispetto $+, \cdot$

• PA^1 ha modelli <u>NON</u> STANDARD NUMERABILI

→ Sia $L = L_{PA} \cup \{c\} = \{0, +, \cdot, s, c\}$
↑ costante

L-teoria $T = PA^1 \cup \{c \neq 0\} \cup \{c \neq \overline{m} \mid m \in \omega\}$

~~Teorema completezza~~

T ha un modello. (per compattezza) infatti

Se $T' \subset T$ finito : $\exists m \in \omega$ $T' \subseteq PA^1 \cup \{c \neq 0, \dots, c \neq \overline{m}\}$

Prendo un <u>espansione</u> M di $\mathbb{N}$ che interpreta c con $n+1$

Sia $B \models T$. $c^B \in B$ è necessariamente non standard

Posso scegliere B numerabile per LS ↓

$\square$

<u>OSS</u> Sia $L \subset L'$ $A \models L'$ $B \models L$ ~~A ex~~

Si dice che A è un ESPANSIONE di B se

- dom A = dom B
- A interpreta L come B

<u>Esempio</u> $L' = \{+, \cdot\}$ $A = (\mathbb{R}, +^{\mathbb{R}}, \cdot^{\mathbb{R}})$
$L = \{+\}$ $B = (\mathbb{R}, +^{\mathbb{R}})$

• ZF (se coerente) ha un modello con numeri non standard

$L' = \{\in, c\}$

$ZF' = ZF \cup \{c \neq \overline{m} \mid m \in \omega\} \cup \{c \in \omega\}$

Sia $T \subseteq ZF'$ finito → $T \subset ZF \cup \{c \neq \overline{m} \mid m < \overline{N}\} \cup \{c \in \omega\}$

Ho come modello il modello di ZF dove c viene interpretato come $\overline{N}$

$\square$

Oss In $(\mathbb{R},+,\cdot)$ si può definire $(0,1,\leq)$

$$x=0 \iff \forall z\ (z+x=z)$$
$$x=1 \iff \forall z\ (z\cdot x=z)$$
$$x\geq 0 \iff \exists y\ (x=y\cdot y)$$
$$x\geq y \iff x-y\geq 0$$
$$z=x-y \iff z+y=x$$

Una L-teoria ammette ELIMINAZIONE dei QUANTIFICATORI se ogni L-formula $\varphi(\bar{x})$ equivale ad una L-formula $\theta(\bar{x})$ senza quantificatori

Oss In $(\mathbb{R},0,+,\cdot,<)$ ho E.Q
in $(\mathbb{R},+,\cdot)$ non ho E.Q

Esempio $\varphi(b,c) = \exists x\ (x^2+bx+c=0)$

$$\Updownarrow \text{ in } \mathbb{R}$$
$$b^2-4c\geq 0$$

Prop (i) gli unici insiemi definibili di $\mathbb{R}$ sono unioni finite di intervalli e punti

(ii) di $\mathbb{R}^n$ ~~sono~~ hanno un numero finito di componenti connesse

Cor $\mathbb{N}\subseteq\mathbb{R}$ non è definibile in $(\mathbb{R},+,\cdot)$

+ In $(\mathbb{N}, \{0, +)$ non si definisce il $\cdot$

"Non esiste $\varphi(x,y,z)$ in $L = \{0, +\}$ con
$$[(\mathbb{N}, \{0, +) \models \varphi(a,b,c)] \iff ab = c$$

Altrimenti $Th(\mathbb{N}, 0, +) \leq_I Th(\mathbb{N}, 0, +, \cdot)$

$\uparrow$ decidibile (aritmetica Presburger) $\qquad$ $\uparrow$ indecidibile $\lightning$

+ In $(\mathbb{N}, 0, S)$ non si definisce il $+$

Basta mostrare che $(\mathbb{N}, 0, S)$ non definisce i <u>PARI</u>

Sia $M \models Th(\mathbb{N}, 0, S)$ non standard e definiamo

$f : M \to M$ $\quad \begin{cases} f(n) = n & \text{se } n \text{ standard} \\ f(n) = Sn & \text{se } n \text{ non standard} \end{cases}$

Allora f è un isomorfismo di M in se ovvero

$\star$ $\forall \theta$ L-formula $\quad M \models \theta(a) \iff M \models \theta(fa)$

Se esistesse $\alpha(x)$ che definisca i pari allora

① $(\mathbb{N}, 0, S) \models \forall x \, [\alpha(x) \leftrightarrow \neg\alpha(Sx)]$

ma da $\star$ avrei $M \models \forall x [\alpha(x) \leftrightarrow \alpha(Sx)]$ $\lightning$